CINCO PRÁCTICAS PRODUCTIVAS PARA UNA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LOS PROCESOS

Ángel Alsina
Universitat de Girona

Resumen:
Se describen cinco prácticas productivas para promover la enseñanza de las matemáticas a través de los procesos, es decir, una enseñanza basada en pensar y hacer. Asumiendo que una 'práctica productiva' en educación matemática es una acción o destreza educativa útil y provechosa para promover el aprendizaje de las matemáticas con sentido en todos los niveles, se consideran cinco prácticas asociadas a las herramientas que nos proporcionan las matemáticas para lograr este propósito: pensar, argumentar, comunicar, conectar y representar. Se concluye que estas prácticas productivas son una oportunidad y un desafío para transformar las prácticas centradas en los contenidos, basadas en memorizar definiciones y procedimientos. Palabras clave: enseñanza de las matemáticas, prácticas matemáticas, prácticas productivas, transformación de la enseñanza, procesos matemáticos.

Palabras clave:
Enseñanza de las matemáticas. Prácticas matemáticas. Prácticas productivas. Transformación de la enseñanza. Procesos matemáticos.

Abstract:
Five productive practices are described to promote process-based mathematics teaching; i.e. teaching based on thinking and doing. Assuming that "productive practices" in mathematics education are educational actions or skills that are useful for promoting meaningful mathematics learning at all levels, we consider five practices associated with the real tools that mathematics offers us to achieve this goal: thinking, arguing, communicating, connecting and representing. We conclude that these productive practices present challenges and opportunities for transforming content-based practice focused on memorising definitions and procedures.

Keywords:
Mathematics teaching. Mathematical practices. Productive practices. Transformation of teaching. Mathematical processes.

Introducción

Si se asume que actualmente las matemáticas escolares implican *pensar y hacer*, más que *memorizar definiciones y procedimientos*, entonces debería asumirse también que estamos ante un cambio de paradigma substancial en la forma de concebir las matemáticas y, en consecuencia, en la forma de enseñarlas.

La visión de las matemáticas escolares focalizada exclusivamente en los contenidos ha quedado atrás. Siguiendo las directrices de organismos internacionales que velan por la mejora de la educación en general como la OCDE (2004), junto con los datos de la investigación en educación matemática que han sido recogidos por asociaciones de reconocido prestigio como el NCTM (2000, 2014), muchos países han ido reformando paulatinamente sus currículos para incorporar otros conocimientos matemáticos de gran relevancia que incidan en las verdaderas formas de pensar y hacer de las matemáticas. En este marco de reforma curricular, se pretende avanzar hacia una enseñanza de los contenidos que promueva su comprensión y uso eficaz a través de los procesos matemáticos (NCTM, 2000, Niss, 2002; OCDE, 2004). Algunos de los ejemplos más claros de este cambio de paradigma en los currículos de matemáticas son, entre otros, los Estándares Comunes para las Matemáticas de Estados Unidos o el currículo de matemáticas de Singapur.

En Estados Unidos, la mayoría de sus estados han adoptado los Estándares Comunes para las Matemáticas como base para los nuevos planes de estudio de matemáticas (CCSSI, 2010). Estos estándares comunes se estructuran en estándares para la práctica matemática y estándares para el contenido matemático. En concreto, se describen ocho prácticas matemáticas para todas las etapas (ver figura 1):

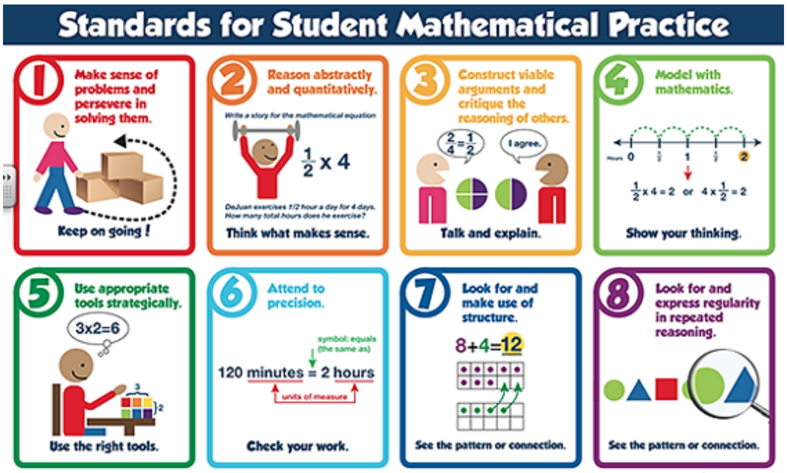

Figura 1. Estándares para las prácticas matemáticas (CCSSI, 2010)

Estas ocho prácticas han sido adaptadas de los cinco estándares de proceso del NCTM (2000) y de los cinco aspectos de competencia descritos en el informe "*Adding It Up*", del *National Research Council* de Estados Unidos (NRC, 2001).

En relación a Singapur, el planteamiento de la enseñanza de las matemáticas que se ha adoptado en el Ministerio de Educación (*Ministry of Education Singapore*, 2012), -y que diversas editoriales han rebautizado con el nombre de 'Método Singapur'- se observa que el foco se centra en la resolución de problemas y que los procesos y las habilidades son ejes imprescindibles para aprender los conceptos (ver figura 2).

En este currículum, inspirado en las aportaciones de autores del ámbito de la psicología educativa como Bruner, Skemp o Vigotsky y de la educación matemática como Dienes, los procesos se conciben como las habilidades involucradas en la adquisición y la aplicación del conocimiento matemático. Incluyen el razonamiento, la comunicación, las conexiones, las aplicaciones y modelización y las habilidades de pensamiento y heurísticos.

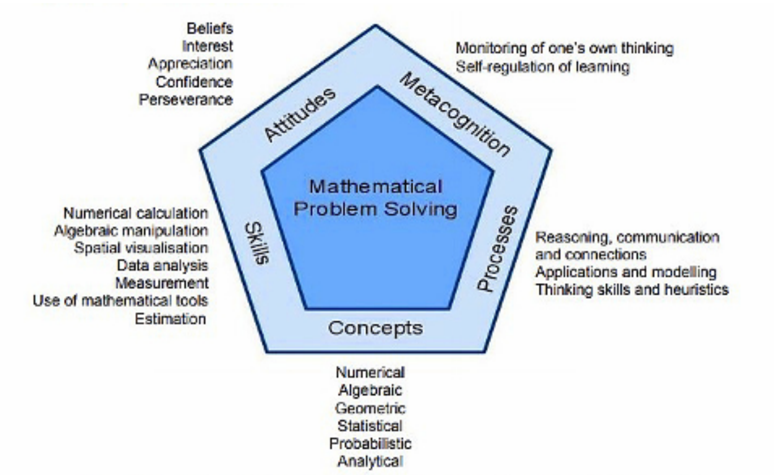

Figura 2. Bases de la enseñanza de las matemáticas en Singapur (*Ministry of Education Singapore*, 2012).

Asumiendo estas ideas, el propósito de este artículo es describir cinco prácticas productivas adaptadas al contexto educativo hispanoamericano que promuevan una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos, dada su relevancia para el desarrollo de la competencia matemática. Por 'práctica productiva' en educación matemática se entiende una acción o destreza educativa útil y provechosa para promover el aprendizaje de las matemáticas con sentido en todos los niveles escolares.

Práctica productiva 1. Promover la resolución de situaciones problemáticas que impliquen pensar

Tradicionalmente, la resolución de problemas en la clase de matemáticas se ha concebido sobre todo como una práctica para ejercitar contenidos previamente explicados. Todos nosotros, en alguna ocasión, nos hemos encontrado ante un listado de problemas para practicar una determinada operación aritmética, la proporcionalidad directa o ecuaciones de primer grado, por poner algunos ejemplos. Pero, ¿dónde está el problema en este tipo de prácticas?, ¿qué tienen que pensar los alumnos para resolver este tipo de situaciones? Actualmente ya no hay discusión acerca de que la principal finalidad de estas prácticas era que los alumnos ejercitasen un determinado contenido y que la principal dificultad con la que se podían encontrar era no conocer un determinado algoritmo o equivocarse en el cálculo. Sin quitarles mérito a estas prácticas focalizadas en aplicar procedimientos previamente explicados en clase, aquí nos interesa enfatizar otro tipo de situaciones problemáticas en un sentido mucho más amplio, pero con un eje común: que impliquen pensar.

Uno de los primeros autores que consiguió introducir esta visión de la resolución de problemas en la escuela fue Pólya (1945), quien estableció cuatro pasos para resolver problemas: entender el problema; configurar un plan; ejecutar el plan; y, finalmente, examinar la solución obtenida. Schoenfeld (1994) consideró insuficientes las estrategias planteadas por Pólya y señaló que el proceso es más complejo e involucra también elementos de carácter emocional-afectivo, psicológico y sociocultural. Desde este prisma, estableció cuatro aspectos que intervienen en la resolución de problemas: los recursos cognitivos, referidos a los conocimientos previos; los heurísticos, referidos a las estrategias o reglas para progresar en situaciones complejas; el control, referido al conjunto de estrategias metacognitivas, es decir, lo que permite un uso eficiente de los recursos disponibles; y el sistema de creencias, referido a las concepciones acerca de la matemática y su enseñanza. Para Schoenfeld, cada uno de estos componentes explica las carencias y, por lo tanto, el poco éxito en la resolución de problemas de los alumnos. Este mismo autor aclara, unos años después, que para que un alumno sea hábil para resolver problemas debe mostrar confianza en la resolución; persistencia al encontrarse con un problema difícil; saber qué tiene que hacer cuando se le presenta un problema desconocido y cambiar de estrategia si no funciona; y tener una lista de estrategias a las que recurrir al resolver problemas (Schoenfeld, 2007).

Diversos organismos y autores han aportado orientaciones para ayudar al profesorado a conseguir que los alumnos tengan habilidades y estrategias para resolver problemas. El NCTM (2000), por ejemplo, destaca que el profesorado debe cultivar y desarrollar una disposición matemática para proponer problemas, es decir, generar nuevas preguntas en una variedad de contextos, aspecto que se desarrollará en la segunda práctica. Coronata (2014), Alsina y Coronata (2014), Maurandi, Alsina y Coronata (2018) y Alsina, Maurandi, Ferré y Coronata (2020) han trabajado durante varios años en la construcción y posterior validación de un instrumento, denominado ETMAP por las siglas en inglés (*Evaluating the Teaching of Mathematics through Processes*), con una doble intención: para orientar al profesorado sobre qué aspectos se deben considerar en el aula para llevar a cabo una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos; y para analizar la presencia de estos procesos en sus prácticas de enseñanza. Este instrumento aporta 7 indicadores para cada proceso, y los indicadores correspondientes a la resolución de problemas son los siguientes (Tabla 1)

Como puede apreciarse, los indicadores de la tabla 1 se focalizan en usar distintos apoyos para plantear problemas (materiales concretos, etc.); contextualizar los problemas siempre que sea posible

Tabla 1. Indicadores de resolución de problemas (Alsina et al., 2020)

1.1	*Raises problematic situations using different types of support (oral, concrete, pictorial).*
1.2	*Contextualizes the problematic situations within the daily life of the students.*
1.3	*Proposes various types of problem situations.*
1.4	*Asks questions that generate research and exploration to solve the problem.*
1.5	*Allows children to use concrete and/or pictorial material with oral support for problem solving.*
1.6	*Keeps children engaged in the problem solving process.*
1.7	*Promotes discussion around problem solving strategies and outcomes.*

a la vida cotidiana; plantear problemas de distintos tipos; plantear buenas preguntas que promuevan las habilidades de pensamiento y los métodos de investigación; permitir que los alumnos usen el apoyo que consideren más adecuado para resolver un problema; mantener el interés por la resolución de problemas; y, finalmente, promover el diálogo en el aula para que los alumnos compartan los procesos de resolución y valoren cual o cuales son las estrategias y técnicas más efectivas.

Práctica productiva 2. Plantear preguntas efectivas en la clase de matemáticas que impliquen *argumentar*

Una de las características esenciales de las prácticas de enseñanza de las matemáticas centradas en el contenido consiste en explicar técnicas y procedimientos con el propósito de que los alumnos resuelvan ejercicios siguiendo unos pasos previamente descritos: por ejemplo, se explica cómo resolver una multiplicación a partir de un algoritmo clásico o cómo se despeja una incógnita/variable en una ecuación lineal/de primer grado cambiando el signo de los números y los operadores al pasar de un lado a otro del igual. En estas prácticas se prioriza la mecanización, pero a menudo hay muy poco espacio para profundizar en el motivo de lo que se hace y por qué se hace y, más en general, en el pensamiento crítico. De acuerdo con Alsina y Planas (2008, p. 17), el pensamiento crítico "requiere que quien quiere resolver un problema haya contribuido de algún modo a identificarlo", es decir, no se trata tanto de decir a los alumnos lo que tienen que hacer, sino de ofrecerles la oportunidad de que se puedan preguntar *qué está pasando, por qué está pasando, qué implicaciones tiene este hecho y con qué otros hechos se relaciona* para que, progresivamente, sean capaces de hablar, escuchar, leer y escribir críticamente. En este marco de razonamiento y prueba, es imprescindible el planteamiento de preguntas efectivas para promover que los alumnos argumenten en las clases de matemáticas, puesto que es la base para la formación de ciudadanos críticos y reflexivos y para la construcción de sociedades democráticas (OECD, 2004; Cornejo-Morales y Goizueta, 2019).

En relación a la argumentación en matemáticas, de acuerdo con Cornejo-Morales, Goizueta y Alsina (2020), se asume que se trata de una actividad comunicativa y situada por medio de la que los alumnos aportan razones (para otros o para sí mismos) para justificar y convencer (o convencerse) sobre cierta posición o para cuestionarla reflexivamente. El elemento central de la argumentación son los argumentos, que son el producto de aspectos cognitivos, emocionales o de conductas imitativas, entre otros. Los argumentos se refieren tanto a las producciones orales y escritas de los alumnos para justificar o cuestionar, como a sus reconstrucciones lingüísticas *a posteriori*, mediante las que expresan sintéticamente el aspecto argumentativo de tales producciones. Desde este prisma, la argumentación es indispensable para promover discusiones productivas en la clase de matemáticas en las que emerjan ideas matemáticas importantes,

Tabla 2. Indicadores de razonamiento y prueba (Alsina et al., 2020)

2.1	Invites students to make conjectures.
2.2	Allows the students themselves to discover, analyse and propose different ways of resolution.
2.3	Asks students to explain, justify or argue the strategies or techniques they used during the resolution.
2.4	Asks students questions to develop their answers.
2.5	Encourages students to check out conjectures from everyday life.
2.6	Promotes support for mathematical reasoning.
2.7	Gives feedback with concrete material allowing divergent thinking.

se muestren las contradicciones y se desarrolle y consolide lo ya comprendido (Smith y Stein, 2011). Este escenario de argumentación colectiva, en el que la argumentación intrapersonal e interpersonal se van alternando, permite analizar la naturaleza de la actividad dentro de las aulas de matemáticas, caracterizada por la resolución colaborativa de problemas y las discusiones de toda la clase.

Pero, ¿cómo provocar la argumentación en matemáticas? Alsina (2011) señala que una de las estrategias más eficaces es el planteamiento de buenas preguntas puesto que, como indica Mercer (2001), se erigen como uno de los instrumentos de mediación más idóneos al hacer avanzar desde unos primeros niveles de concienciación sobre lo que uno ya sabe o es capaz de hacer hacia niveles más superiores. Desde este prisma, Alsina describe algunas características de las buenas preguntas: preguntas abiertas que inviten a razonar o justificar, definir o relacionar el objeto de estudio con experiencias de los alumnos; preguntas que partan de las aportaciones de los alumnos para avanzar en el pensamiento colectivo a partir de las aportaciones individuales; y preguntas que provoquen conexiones con conocimientos aprendidos con anterioridad, como ¿qué relacionáis con...?; ¿cómo definirías…?; etc.

Más adelante, EduGAINS (2011) propuso ocho consejos para plantear preguntas efectivas en la clase de matemáticas: 1) Anticipar el pensamiento de los alumnos; 2) Vincular con los objetivos de aprendizaje; 3) Plantear preguntas abiertas; 4) Plantear preguntas que realmente necesitan ser contestadas; 5) Incorporar verbos que estimulan el pensamiento y la comprensión, como conectar, elaborar, evaluar y justificar; 6) Plantear preguntas que abren una conversación para incluir a todos (en el marco de una comunidad de aprendizaje); 7) Mantener las preguntas neutrales (evitar calificativos como 'fácil' o 'difícil' ya que pueden condicionar las respuestas de los alumnos); 8) Proporcionar tiempo de espera (entre las preguntas y las respuestas de los alumnos). También el NCTM (2014) hace hincapié en la importancia de plantear preguntas, que ellos denominan deliberadas, que deberían servir tanto para explorar el pensamiento de los alumnos como para provocar que expliquen y justifiquen sus ideas y acciones.

Desde una perspectiva más genérica, en el instrumento ETMAP se señalan 7 indicadores para promover y analizar la presencia de la argumentación en la clase de matemáticas (Tabla 2).

Como puede apreciarse en la tabla 2, algunas de las principales actuaciones del profesorado consisten en plantear interrogantes para que los alumnos hagan conjeturas y las comprueben, junto con ayudarles a descubrir, analizar, proponer, explicar, justificar y/o argumentar diversas vías de resolución de problemas y las respectivas soluciones, entregando la retroalimentación correspondiente y usando material concreto si es necesario.

Práctica productiva 3. Fomentar la comunicación en el aula de matemáticas en un ambiente que invite a *interactuar, negociar y dialogar*

La forma clásica de enseñar matemáticas se ha basado en la información, en sentido unidireccional: un profesor que 'lo sabía todo' transmitía el conocimiento ya elaborado a los alumnos, que 'no sabían nada'. En el marco de la enseñanza de las matemáticas a través de los procesos, la información se ha substituido por la comunicación, en sentido bidireccional. De ese modo, en lugar de prácticas docentes en las que un profesor (emisor) explica la lección y los alumnos escuchan (receptores pasivos), el profesor promueve la interacción, la negociación y el diálogo y los alumnos participan activamente, en un ambiente de andamiaje colectivo en el que se aprende nuevo conocimiento a través de la co-construcción y reconstrucción. Vemos, pues, que el papel del profesor sigue siendo esencial, pero no transmitiendo un conocimiento ya creado por otros con anterioridad, sino a través de una planificación y gestión de la enseñanza que permita que el conocimiento sea creado por el propio alumno, usando el lenguaje como principal herramienta.

En este sentido, la comunicación juega un papel muy importante en el desarrollo del pensamiento matemático y, por esta razón, está cada vez más presente en las políticas educativas y en los documentos curriculares (NCCA, 2014). Para Ginsburg (2009), hablar sobre el pensamiento matemático y participar en el razonamiento, la justificación y la argumentación es fundamental para la educación matemática de todos los alumnos.

Desde esta perspectiva, una "comunidad de conversación matemática" en la que todos los alumnos tengan la oportunidad de describir su pensamiento a través de procesos de interacción, negociación y diálogo, tiene el potencial de mejorar su lenguaje matemático. Por esta razón, en las últimas décadas ha aumentado mucho el interés por el análisis del discurso en el aula de matemáticas y sus repercusiones en el aprendizaje matemático de los alumnos, con el propósito de ayudarles no sólo a expresarse, sino a entenderse y a hacerse entender, ya que un alumno con bajas habilidades de comunicación no puede explicar su pensamiento, no tiene la habilidad para justificar con ejemplos y no aprecia la importancia de los comentarios de los demás (Scusa, 2008). En cambio, los alumnos con una buena comunicación matemática, cuestionan, critican y piden aclaraciones (Yeo y Zhu, 2005). En síntesis, pues, un alumno que tiene éxito en la comunicación matemática puede explicar su pensamiento clara y concisamente; busca

Tabla 3. Indicadores de comunicación (Alsina et al., 2020)

3.1	Places more emphasis on communication in the classroom than the delivery of unidirectional information.
3.2	Encourages interaction with others to learn and understand mathematical ideas.
3.3	Encourages the exchange of mathematical ideas through oral, gestural, graphic, concrete and/or symbolic language.
3.4	Asks the child to explain their strategies and responses with appropriate mathematical language
3.5	Encourages students to respect the way they think and express their points of view on mathematical knowledge.
3.6	Encourages attentive listening to the views of others.
3.7	Intervenes mostly through questions rather than explanations.

aclaraciones; se da cuenta de que es necesario ser perseverante en matemáticas y hacer errores; y cuando a otros se les ocurren nuevas ideas, pide que se las expliquen o intentan averiguar porque tienen sentido.

Haciendo alusión de nuevo al instrumento ETMAP, en él se presentan 7 indicadores que pueden orientar al profesorado tanto a promover la comunicación en el aula de matemáticas como a analizar su presencia en las prácticas de enseñanza (Tabla 3).

Muy sintéticamente, algunos de los rasgos esenciales de las prácticas de enseñanza de las matemáticas que fomentan la comunicación en el aula de matemáticas son que promueven la interacción y el intercambio de ideas, más que la información; se promueve el uso adecuado de distintos lenguajes (oral, gráfico, simbólico, etc.); se incentiva la escucha activa a los demás, incentivando el respeto por la forma de pensar y de exponer puntos de vista divergentes; y se interviene principalmente a través del planteamiento de preguntas efectivas, más que dando explicaciones.

Práctica productiva 4. Diseñar e implementar actividades matemáticas que requieran *hacer conexiones*

Muchos de nosotros hemos aprendido unas matemáticas escolares desconectadas, habitualmente a través de un libro de texto que estructuraba el conocimiento matemático en lecciones o temas con un planteamiento lineal, es decir, organizado en bloques de contenido. En estos libros, la práctica totalidad de las lecciones eran de numeración y cálculo y/o de álgebra y, si había suerte, se alcanzaba a hacer alguna lección de geometría, de medida o de estadística y probabilidad, siempre y cuando el libro los contemplara y el profesor hubiese planificado las lecciones para llegar al final del libro, que es donde se colocaban las lecciones de estos "otros bloques".

Esta organización del conocimiento matemático provocó que durante diversas décadas las matemáticas se concibieran como un conjunto de bloques de contenido sin ninguna conexión entre ellos: por un lado, la numeración y el cálculo; por otro lado, la geometría y la medida; y la estadística y la probabilidad por ninguno, lamentablemente (ya que no fue hasta finales de la década de los ochenta cuando este bloque se introdujo en el currículo, y los libros tardaron en introducirla).

Las dificultades que mostraban los ciudadanos para aplicar los conocimientos matemáticos en la vida cotidiana, donde el conocimiento matemático no se presenta parcelado, provocó una reacción de

Tabla 4. Indicadores de conexiones (Alsina et al., 2020)

4.1	Considers students' everyday mathematical experiences to move towards more formal mathematics.
4.2	Makes connections between different mathematical knowledge.
4.3	Develops mathematical activities linked to musical contexts.
4.4	Works on mathematics by linking it to children's literature.
4.5	Relates mathematics to artistic expression.
4.6	Generates mathematical knowledge through contexts linked to psychomotricity.
4.7	Encourages students to apply mathematical knowledge to everyday situations.

diversos organismos que, como ya se ha indicado en la introducción, llevaron a un cambio de paradigma en la forma de concebir y enseñar las matemáticas. En el contexto de esta importante transformación curricular, el NCTM (2000) ha sido uno de los organismos que más ha contribuido a resaltar la importancia de las conexiones matemáticas.

Alsina (2016) indica que las conexiones matemáticas se refieren a las relaciones entre los diferentes temas de contenido matemático y entre los contenidos y los procesos matemáticos (conexiones intradisciplinares); las relaciones de las matemáticas con otras áreas de conocimiento (conexiones interdisciplinares); y las relaciones de las matemáticas con el entorno que nos rodea (enfoque globalizado). Para este autor, aprender matemáticas desde esta triple visión -intradisciplinar, interdisciplinar y de manera globalizada- es uno de los principios fundamentales del aprendizaje de las matemáticas.

Las conexiones matemáticas tienen ya una larga tradición en la investigación en educación matemática. Así, por ejemplo, desde la Educación Matemática Realista (EMR), Freudenthal (1991) plantea el Principio de Interconexión, según el cual los temas matemáticos se deben conectar unos con otros. Anteriormente, este mismo autor ya avanzó que lo que realmente importa es saber cómo encaja el tema en todo el cuerpo de la enseñanza matemática, si se puede o no integrar con todo, o si es tan estrafalario o aislado que, finalmente, no dejaría ninguna huella en la educación (Freudenthal, 1982).

Considerando estos antecedentes, en el instrumento ETMAP se presentan los siguientes 7 indicadores acerca de la presencia de las conexiones matemáticas en el aula (tabla 4).

En la tabla 4 se observa que los indicadores que pueden servir de orientación para diseñar e implementar actividades matemáticas competenciales que fomenten las conexiones matemáticas inciden principalmente en la importancia de las conexiones intradisciplinares, interdisciplinares y con el entorno, que son los tres tipos de conexiones a las que se ha hecho alusión. Sin embargo, tal como se reflexiona en Alsina et al. (2020), casi la mitad de los indicadores del instrumento (4.3, 4.4 y 4.5) se refieren al 'área cultural' (conexiones de las matemáticas con la música, con la literatura y con el arte respectivamente). Este hecho provoca que, en realidad, los indicadores de este proceso matemático estén muy sesgados hacia esta área, y no se consideren otras posibles conexiones con otras áreas fundamentales como la naturaleza, la biología, la equidad, la salud, la tecnología o la sostenibilidad, que también forman parte de la vida cotidiana igual que la música, la literatura o las artes. Este análisis crítico debería tenerse en cuenta al diseñar actividades matemáticas competenciales que promuevan las conexiones, con la finalidad de llevar a cabo prácticas productivas mejoradas.

Práctica productiva 5. Incentivar la expresión oral, gráfica y/o simbólica de las ideas matemáticas internas y las acciones externas a través de tareas que impliquen *representar.*

En educación matemática, el término 'representación' se refiere a la adquisición de un concepto o de una relación entre conceptos y también a la forma como se adquiere, por lo que alude tanto a los procesos y a los productos observables externamente como a lo que tiene lugar internamente en las mentes de los que están haciendo matemáticas (NCTM, 2000). Por esta razón, en esta última práctica productiva se hace alusión tanto a las ideas matemáticas internas como a las acciones externas. Langrall, Mooney, Nisbet y Jones (2008) enumeran las distintas formas de representación tanto internas como externas que pueden utilizar los alumnos para organizar y expresar su pensamiento matemático: manipuladores concretos, modelos mentales, notación simbólica, tablas, gráficos, rectas numéricas, historias y dibujos. Freudenthal (1991) aclara que el desarrollo progresivo de la representación en matemáticas va de lo concreto a lo abstracto, por lo que es necesario respetar y favorecer el proceso de la representación fomentando que las primeras representaciones sean concretas, a partir de objetos o dibujos y usando el lenguaje natural; posteriormente pictóricas, usando tablas o diagramas; y finalmente convencionales, usando símbolos abstractos, que están en constante cambio dependiendo del sistema semiótico que se está utilizando (Duval, 1995). Desde esta visión, Alsina (2011) concluye que, aunque el desarrollo de la representación vaya de lo concreto a lo abstracto, en términos generales no se trata de un proceso unidireccional sino bidireccional, es decir, de lo concreto a lo abstracto y de lo abstracto otra vez a lo concreto, a pesar de que la finalidad sea siempre aprender (y sobre todo comprender) el símbolo que representa un objeto, una situación o una idea matemática.

Considerando estos fundamentos, representar en matemáticas es como leer en literatura o como experimentar en química. Sin embargo, esta idea ha sido interpretada e implementada de formas diferentes en los distintos niveles de enseñanza de las matemáticas: por un lado, la tendencia principal en los primeros niveles ha sido fomentar la expresión oral, al asumir que los alumnos tienen pocas habilidades para expresar por escrito sus conocimientos matemáticos; en el otro extremo, en cambio, se ha abusado del simbolismo, al asumir que los alumnos de los últimos niveles requieren un lenguaje simbólico para formalizar el conocimiento matemático. Aquí, en cambio, se aboga que los alumnos de las primeras edades empiecen a representar por escrito tanto sus ideas matemáticas internas como sus acciones externas -principalmente a través de dibujos y signos, más que con símbolos- y que los alumnos de los últimos niveles representen oralmente y gráficamente las ideas y acciones antes de proceder a representarlas simbólicamente.

Desde este marco, en el instrumento ETMAP se consideran los siguientes 7 indicadores acerca de la presencia de la representación en matemáticas (tabla 5).

De acuerdo con los indicadores de la tabla 5, el

Tabla 5. Indicadores de representación (Alsina et al., 2020)

5.1	Asks children to talk, listen and reflect on mathematics to move towards symbolic representation.
5.2	Uses specific materials as resources to represent mathematical ideas.
5.3	Uses exemplary models (schemes, among others) to show ways of solving problem situations.
5.4	Works with children on specific representations (drawings, etc.).
5.5	Works with children on pictorial representations (signs, etc.).
5.6	Works with children on symbolic representations (conventional notation).
5.7	Shows two-way work (from specific to abstract and from abstract to concrete.

profesorado de todos los niveles preocupado tanto por incorporar como para analizar la representación en sus prácticas de enseñanza, debería implementar tareas que promuevan sobre todo el uso de distintos tipos de representaciones para expresar ideas matemáticas internas y acciones externas (en sentido bidireccional, es decir de lo concreto a lo abstracto y de lo abstracto a la concreto), junto con procesos de modelización matemática para resolver problemas.

Consideraciones finales

Asumiendo que el empleo de un conjunto codificado de prácticas puede hacer accesibles y manejables, para un mayor número de profesores, los enfoques de la enseñanza de las matemáticas centrados en el alumno (Smith y Stein, 2011), en este artículo se han presentado cinco prácticas productivas para una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos. Estas cinco prácticas, de acuerdo con la investigación que establece la importancia de la construcción del propio conocimiento por parte de los alumnos (Bransford, Brown y Cocking, 2000), promueven una planificación y gestión de la enseñanza que contribuya a desarrollar la competencia matemática de los alumnos, en el sentido planteado por el NCTM (2000), Niss (2002) o la OCDE (2004), entre otros.

Desde este prisma, una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos, basada en pensar y hacer más que en memorizar técnicas y procedimientos, implica una planificación y gestión guiada por una serie de acciones del profesorado que se sintetizan a continuación:

Resolución de problemas: ¿Qué situación problemática/reto voy a plantear a los alumnos?; ¿Qué interrogantes voy a plantear para que comprendran la situación? (por ejemplo: ¿cuál es la incógnita/los datos de la situación?; ¿Conoces algún problema vinculado con éste?; ¿Qué pasos vas a seguir? .../...)

Razonamiento y prueba/argumentación: ¿Qué buenas preguntas voy a plantear para que los alumnos argumenten sus ideas matemáticas y sus acciones?

Comunicación: ¿Cómo voy a fomentar la interacción? (en parejas, en pequeño grupo, etc.); ¿Qué vocabulario específico deben aprender?

Conexiones: ¿Con qué bloques de contenidos matemáticos se puede relacionar la actividad?; ¿Desde qué disciplina voy a plantear el reto?
Representación: ¿Qué tipo de representación deben hacer? Verbal, gráfica, simbólica ...
Se trata, en definitiva, de un proceso similar a la conducción: cuando se aprende a conducir, se activa un proceso mental muy controlado en el que el conductor novel está muy pendiente de lo que tiene que hacer para arrancar, para cambiar de marcha, para frenar, para cumplir las normas de circulación, etc. Progresivamente, este proceso controlado pasa a ser un proceso automático, de manera que la mente del conductor experto es capaz de activar muchos de estos conocimientos de forma simultánea, casi sin pensarlo. Pasa lo mismo con una enseñanza de las matemáticas a través de los procesos: en los primeros momentos de transformación de las prácticas debe llevarse a cabo un proceso muy controlado para planificar cómo se va a enseñar un determinado contenido, a través de qué procesos, pero progresivamente se automatiza esta forma de abordar la enseñanza de las matemáticas.
Estamos, pues, ante una de las grandes oportunidades y desafíos de la educación matemática: transformar las prácticas de enseñanza de las matemáticas a través de los contenidos (memorizar definiciones y procedimientos) por prácticas productivas consistentes en enseñar matemáticas a través de los procesos (pensar y hacer), con el propósito de que los alumnos tengan acceso a las verdaderas herramientas que nos proporcionan las matemáticas -pensar, argumentar, comunicar, conectar y representar- y de esta forma puedan desarrollar su competencia matemática.

Financiado por: FEDER/Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades – Agencia Estatal de Investigación/ Proyecto EDU2017-84979-R.

Referencias bibliográficas

Alsina, Á. (2011). *Aprendre a usar les matemàtiques. Els processos matemàtics: propostes didàctiques per a l'Educació Infantil*. Vic: Eumo Editorial.

Alsina, Á. (2016). Diseño, gestión y evaluación de actividades matemáticas competenciales en el aula. Épsilon, Revista de Educación Matemática, 33(1), 7-29.

Alsina, Á. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas* (6-12 años). Barcelona: Editorial Graó.

Alsina, Á. y Coronota, C. (2014). Los procesos matemáticos en las prácticas docentes: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 3(2), 21-34.

Alsina, Á. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Madrid: Narcea S.A. de Ediciones.

Alsina, Á., Maurandi, A., Ferre, E., y Coronata, C. (2020). Validating an Instrument to Evaluate the Teaching of Mathematics Through Processes. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-020-10064-y

Bransford, J.D., Brown, A.L. y Cocking, R.R. (2000). *How people learn: Brain, mind, experience, and school*. Whasington, D.C.: National Academy Press.

Common Core State Standards Initiative [CCSSI] (2010). *Common Core State Standars for Mathematics*. Recuperado de http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.

Cornejo-Morales, C. y Goizueta, M. (2019) El tránsito entre argumentos diagramáticos y narrativos en preescolar. Orientaciones y propuestas. *Revista UNO*, 85, 28-31.

Cornejo-Morales, C., Goizueta, M., y Alsina, Á. (2020). *Modelo para analizar la argumentación en educación matemática infantil*. Artículo entregado para la publicación.

Coronata, C. (2014). *Presencia de los procesos matemáticos en la enseñanza del número de 4 a 8 años. Transición entre la Educación Infantil y Primaria*. (Tesis Doctoral). Universidad de Girona, Girona.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

EduGAINS (2011). *Asking effective questions*. Recuperado de http://www.edu.gov.on.ca/eng/literacynumeracy/inspire/research/cbs_askingeffectivequestions.pdf.

Freudenthal, H. (1982). Fiabilité, validité et pertinence – critères de la recherche sur l'enseignement de la mathématique. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 395-408.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ginsburg, H.P. (2009). Early mathematical education and how to do it. En O. Barbarin y B. Wasik (Eds.), *Handbook of child development and early education: Research to practice* (pp. 403–428). Nueva York: The Guildford Press.

Langrall, C. W., Mooney, E. S., Nisbet, S., y Jones, G. A. (2008). Elementary students' access to powerful mathematical ideas. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 109–135). Nueva York: Routledge.

Maurandi, A., Alsina, Á y Coronata, C. (2018). Los procesos matemáticos en la práctica docente: análisis de la fiabilidad de un cuestionario de evaluación. *Educatio Siglo XX1*, 36(3), 333-352.

Mercer, N. (2001). *Palabras y mentes*. Barcelona: Paidós.

Ministry of Education Singapore (2012). *Mathematics Syllabus*. Primary One to Six. Singapore: Curriculum Planning and Development Division.

National Council for Curriculum and Assessment [NCCA] (2014). *Mathematics in Early Childhood and Primary Education (3-8 years). Definitions, Theories, Development and Progression.* Recuperado de https://www.ncca.ie/media/1494/maths_in_ecp_education_theories_progression_researchreport_17.pdf.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2014). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. Reston, Va.: NCTM.

National Research Council [NRC] (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: The National Academies Press.

Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom Project*. Roskilde: Roskilde University.

Pólya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 2002.

Schoenfeld, A. H. (2007). *Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics*. ZDM Mathematics Education, 39, 537-551.

Schoenfeld, A.H. (Ed). (1994). *Mathematical thinking and problem solving*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Scusa, T. (2008). *Five processes of mathematical thinking*. Recuperado de: https://digitalcommons.unl.edu/mathmidsummative/38/

Smith, M. S. y Stein, M.K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston, VA: NCTM.

The Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD] (2004). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. París: OECD.

Yeo, S. M., y Zhu, Y. (2005). Higher-order thinking in Singapore mathematics classrooms. *Proceedings of the international conference on education: Redesigning pedagogy: Research, policy, practice*. Singapore: Centre for Research in Pedagogy & Practice, National Institute of Education.