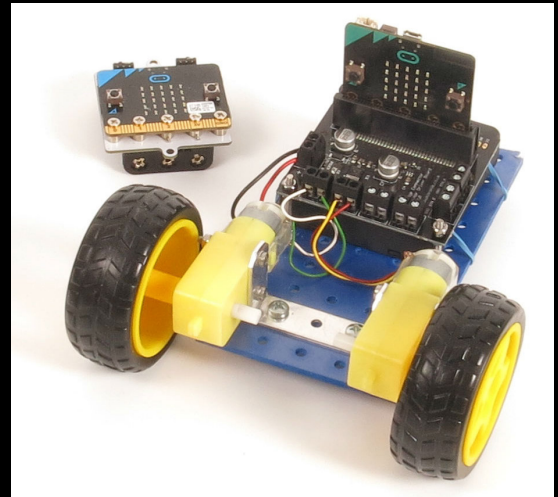
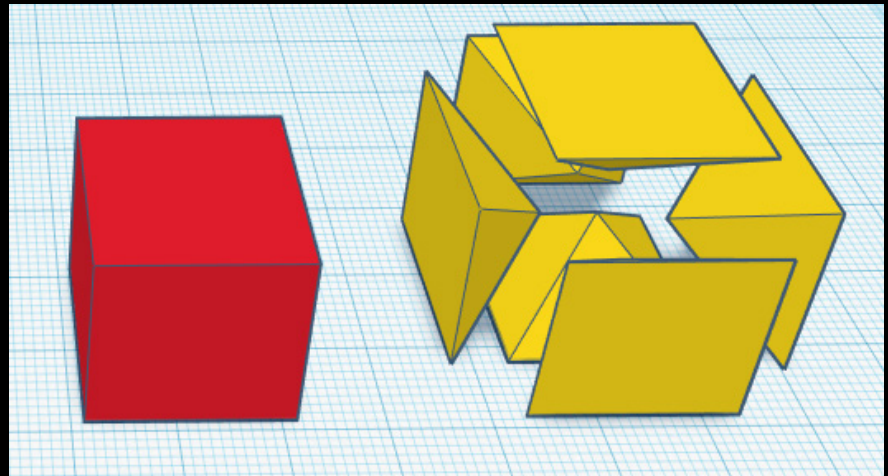


```
quan la tecla espai es premi
per sempre
  canvia el vestit a vestit2
  espera 0.1 segons
  següent vestit
  mou-te 10 passos
  si tocant Pilota llavors
    envia a tots futbol
    canvia el vestit a vestit2
    espera 1 segons
    següent vestit
    toca el so Pop
  atura aquest programa
```



# Assaig de didàctica

De l'error al coneixement: l'aprenentatge  
De les idees als projectes (STEAM)

Jordi Achón



UNIVERSITAT POLITÈCNICA  
DE CATALUNYA  
BARCELONATECH

Primera edició: febrer de 2020

© Jordi Achon, 2020  
© Iniciativa Digital Politècnica, 2020  
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC  
Edifici K2M, Planta S1, Despatx S103-S104  
Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona  
Tel.: 934 015 885  
[www.upc.edu/idp](http://www.upc.edu/idp)  
E-mail: [info.idp@upc.edu](mailto:info.idp@upc.edu)

ISBN: 978-84-9880-823-0

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat de l'excepció prevista a la llei.

**Fracassa una altra vegada, fracassa millor**  
Bertolt Brecht (1898-1956)

**Els errors més petits són sempre els millors**  
Molière (1622-1673)



# Sumari

<b>Pròleg</b> .....	7
<b>Agraïments</b> .....	9
<b>Introducció</b> .....	11
<b>1. Crònica d'una lliçó</b> .....	15
La diversitat, sempre sorprenent .....	17
Després de classe.....	18
Tothom mira el mateix, però tothom ho veu igual?.....	19
Construir coneixement: la didàctica .....	20
Un error memorable .....	23
Errors latents i errors eruptius.....	24
La llavor d'un fracàs didàctic .....	26
La fàbrica de capsos.....	27
Entorns d'aprenentatge.....	28
<b>2. La ment del geni</b> .....	31
Una mica de psicologia cognitiva, si us plau.....	33
Les tres ments del geni.....	34
Les habilitats del geni intuïtiu .....	39
Heurístiques .....	39
Les habilitats del geni executiu .....	41
Les habilitats del geni racional.....	43
La memòria associativa del geni .....	44
El poder cognitiu de l'analogia.....	46
El cor del geni.....	48
El binomi de la creativitat: heurística → imaginació .....	50
El llenguatge, l'eina del pensament.....	51
L'eina recursiva del geni.....	54
<b>3. Heurístiques</b> .....	57
D'heurístiques i problemes .....	59
De la curiositat a les heurístiques de la interrogació .....	61
Heurístiques de l'exploració i del descobriment.....	64
Apunt sobre els raonaments natural i formal .....	67

Heurístiques del raonament analògic .....	69
Apunt sobre lògica i llenguatge natural .....	72
Heurístiques del raonament deductiu .....	72
Heurístiques de la substitució .....	75
Heurístiques del raonament inductiu.....	77
Posem fil a l'agulla: les heurístiques del prototip .....	79
La heurística del tot s'hi val .....	82
Les heurístiques errònies .....	82
<b>4. Genis fal·libles</b> .....	83
Comprendre els errors: descriure les heurístiques errònies .....	84
Diversitat d'errors en un mateix aprenentatge .....	86
Biaixos cognitius.....	86
El biaix de la substitució per simplificació .....	87
L'efecte <i>priming</i> i les àncores .....	88
L'àncora de Menó .....	89
Àncores i obstacles epistemològics .....	91
El biaix de confirmació.....	92
Errors racionals.....	94
La <i>big data</i> dels errors d'aprenentatge.....	95
<b>5. Quan els genis aprenen a equivocar-se</b> .....	97
Induir i planificar el conflicte cognitiu .....	98
Aprendre dels errors: les tres fases .....	99
Cas 1: El desllorigador de Sòcrates .....	100
Cas 2: Programar un gat que xuta penals.....	101
Cas 3: El Sol i la calor .....	104
De l'error al coneixement .....	107
<b>6. L'aprenentatge per assaig i error</b> .....	109
Dos apunts sobre el coneixement científic i tecnològic .....	112
Muntant i desmuntant coneixements .....	113
La lògica no ho demostra tot.....	115
L'aprenentatge per assaig i error.....	116
Narratives per a l'aprenentatge .....	118
L'entorn d'aprenentatge i els recursos.....	119
La interacció social .....	119
La profunditat del model .....	119
<b>7. De la idea al projecte</b> .....	121
Programant planetaris .....	122
Pensar i fer un motor elèctric .....	129
Projecte Pitàgores .....	136
<b>Bibliografia citada</b> .....	145
<b>Notas</b> .....	151

El procés d'aprenentatge és complex, alhora que consubstancial a l'evolució. D'una banda, es pot pensar en l'aprenentatge innat, intuïtiu, amb el qual aprenem a caminar, a parlar o a fer moltes de les accions quotidianes que diàriament desenvolupem de manera automàtica, és a dir, sense pensar-hi. D'altra banda, la comprensió de l'entorn, dels fenòmens físics, dels processos socials o econòmics, de les ciències i les humanitats en general requereixen de l'anàlisi de l'entorn, la formulació d'hipòtesis, la validació de models i resultats o de la inferència, per posar només alguns exemples de processos habituals d'aprenentatge. En un cas o en l'altre, l'aprenentatge es basa en l'experimentació, en la pràctica en l'encert i en l'error. Efectivament, com a resultat de l'experimentació hi ha encerts, que confirmen el bon camí, i també hi ha errors, que ens indiquen que cal revisar algun dels plantejaments que hem fet i tornar-ho a intentar.

En aquest llibre, Jordi Achón exposa els principis d'aquests procediments. Amb una revisió seriosa i extensa, ens parla, precisament, dels errors que comenten els nois i les noies que han passat per les seves classes. Analitza amb casos concrets quins són els motius pels quals es cometen aquests errors, i dona claus per millorar l'aprenentatge a partir de l'anàlisi d'errors. Ens parla d'exemples específics, treballats al llarg d'una llarga experiència, en què ha anat recollint dades i ha experimentat, aprenent ell mateix al llarg del camí, quines són les eines més útils per aconseguir que els nois i les noies que han passat per les seves classes evolucionessin en el procés d'aprenentatge.

Llegint l'assaig del professor Achón es poden identificar fàcilment situacions molt similars a les que qualsevol professor es troba en el seu dia a dia. Argumenta i fonamenta sòlidament les bases del procés d'aprenentatge, tempteja propostes concretes i ens proporciona elements de reflexió molt interessants per poder adaptar maneres de fer a les nostres aules, sigui quin sigui el nivell i la temàtica de la matèria. Quan acabem de llegir aquest text, voldríem tornar a ser nens per poder anar a les classes del professor Achón.

**Sisco Vallverdú**

Professor de la Universitat Politècnica de Catalunya  
Delegat del rector per a la tecnologia i la innovació docent  
Barcelona, desembre de 2019





## Agraïments

A Sisco Vallverdú, amb qui he tingut l'oportunitat de debatre i de contrastar les nostres experiències docents, la seva com a professor universitari de la UPC i la meua com a professor d'ESO. Tot i que treballem en àmbits educatius ben diferents, hem pogut comprovar que podem intercanviar experiència i coneixement didàctic, perquè en qualsevol nivell educatiu poden funcionar els mateixos principis pedagògics i metodològics. També li agraeixo el suport a la meua recerca amb el pròleg que ha escrit.

A Quim Fonoll, expert en tecnologia per a l'educació inclusiva i la diversitat funcional. Hem compartit llargues converses i coincidim en què si observem en el context de l'aula ordinària aprenentatges d'alumnes amb discapacitats, d'ells se'n poden extreure coneixements didàctics valuosos que enriqueixen els aprenentatges de tothom.

A Jordi Regalés i Jaume Riera, enginyers i professors de tecnologia. En el marc del CESIRE continuem desenvolupant propostes didàctiques sobre electromagnetisme per a l'ESO i batxillerat. Una d'aquestes propostes s'utilitza en aquest assaig i fonamenta la proposta didàctica que hi exposo.

A Marc Àvia, professor de tecnologia, amb qui durant uns anys vam compartir institut i alumnes. Ha estat una grata experiència treballar mà a mà amb ell tot compartint espai docent i alumnes. Li agraeixo el suport i la crítica a les meves propostes didàctiques.

A Tomás Merlos, catedràtic d'institut de filosofia, li agraeixo que m'hagi fet conèixer el preciós passatge del Menó de Plató en què Sòcrates ensenya a un jove a resoldre el problema de la duplicació de l'àrea d'un quadrat. És el primer error d'aprenentatge documentat de la història. L'he replicat moltes vegades a classe i l'error persisteix. L'utilitzo en aquesta recerca per il·lustrar un tipus de biaix cognitiu.

El principal agraïment, però, és per a tots els nois i les noies que han estat alumnes meus al llarg de la meua carrera docent. Crec que la majoria m'hauran perdonat que hagi assajat amb ells molts materials didàctics, sovint amb poc èxit al començament, però que, a força d'insistir-hi promoció rere promoció, han millorat. Vull destacar que el meu agraïment és sobretot per haver pogut compartir un munt d'aprenentatges, de manera que mentre que ells aprenien, jo esbrinava i també aprenia com s'ho feien; em considero afortunat.



## Introducció

Per al sisè aniversari de la meva neta vaig regalar-li una joguina programable. Era una mena de marieta riallera. Tenia un pam de llargada, es desplaçava amb rodes i tenia un cos transparent, pensat per ensenyar els components electrònics. Se la programava mitjançant uns botons situats a l'esquena. El repertori d'accions que podia fer era molt simple: avançar (15 cm), retrocedir, girar a la dreta (90°), girar a l'esquerra, pausa (1 segon), esborrar memòria i executar. Com que la seva usabilitat era força reeixida, no li van caldre gaires explicacions per començar-hi a jugar.

Poc després, quan ja l'havia remenada i marejada tant com va voler, tot prement botons a l'atzar i admirant el joc de llums i sons associats a cada acció, la seva curiositat començà a minvar; llavors, li vaig proposar el repte de programar-la per recórrer un camí de forma quadrada, figura que vaig dibuixar a l'aire amb un dit. Se l'il·luminà la cara i va començar a prémer ràpidament els botons. En executar el programa, la marieta va avançar en línia recta quatre vegades consecutives i després va girar cap a la dreta també quatre vegades consecutives, de manera que acabà el trajecte fent una volta sobre ella mateixa.

Quan va avançar per segona vegada i no va girar, li va aflorar a la cara una expressió entre la sorpresa i la contrarietat: la marieta no feia el que ella volia. Tot i que hi vaig insistir, va rebutjar un nou assaig i va anar a fer una altra cosa. I jo, per no fer-me l'avi pesat, no hi vaig insistir.

El programa que ella havia ideat era aquest: avança, avança, avança, avança, gira a la dreta, gira a la dreta, gira a la dreta, gira a la dreta. El va pensar en un sol instant, sens dubte imaginant-se un quadrat i descomponent-lo (analitzant-lo) en els seves parts més elementals: quatre costats i quatre cantonades.

L'endemà es va plantar davant meu amb la marieta a la mà, i sense dir res, la va deixar a terra i va prémer el botó d'execució: la marieta va recórrer el quadrat imaginari, i, per bé que els sons de cada acció i les seves pampallugues eren les mateixes que el dia anterior, la tonada no, ja que l'ordre en què es produí la successió de llums i sons no era el mateix que el dia anterior. Era la tonada de l'èxit.

La seva nova temptativa havia reeixit: avança, gira a la dreta, avança, gira a la dreta, avança, gira a la dreta, avança, gira a la dreta. No cal dir que estava molt cofoia d'haver-ho fet ella tota sola. Contràriament al que semblava, no havia pas abandonat el projecte, sinó que havia assumit el repte derivat del primer fracàs i havia continuat pensant-hi una vegada assossegat el petit trasbals emocional. Ignoro com s'ho va

fer per identificar l'error i produir la nova temptativa, però aposto que fou una intuïció ràpida i brillant; això, és clar, després d'haver-se proposat que volia reeixir en el repte. Ningú no ens ensenya a prendre consciència dels errors i a treure'n un profit cognitiu. Aquesta capacitat deu estar codificada al nostre ADN.

Devem al psicòleg estatunidenc Edward Thorndike (1874-1949), per molts considerat el pare de la psicologia educativa, la formulació de l'expressió «aprenentatge per assaig i error». Però cal matisar que, en aquest context, l'assaig sempre és una temptativa intel·ligent, que podrà ser més o menys reeixida però que mai no es fa a l'atzar.

Aquest assaig parla d'això: de com conrear la capacitat d'aprendre per assaig i error de l'alumnat en entorns didàctics interdisciplinaris que aposten per un aprenentatge basat en la resolució de problemes i en el treball per projectes. És una pedagogia amb una llarga tradició i la seva actualització inspira moviments pedagògics contemporanis com l'educació STEAM (acrònim anglès de ciència, tecnologia, enginyeria, art i matemàtiques) i la vessant educativa del moviment *Maker* (fes-ho tu mateix).

En general, aprenem per assaig i error o per imitació, i sovint aquestes dues modalitats de l'aprenentatge no es poden destriar fàcilment en un aprenentatge concret. També cal tenir ben present que la capacitat d'aprendre no es limita a l'àmbit de la consciència, ja que hi ha multitud d'aprenentatges que fem, i que hem fet al llarg de la vida, d'una manera inconscient, i aquesta realitat també es produeix a les aules, sigui quina sigui la metodologia didàctica que s'hi practiqui. La diferència entre els aprenentatges explícits, que inclouen tant els que es fan per imitació com els que es fan per assaig i error, i els aprenentatges implícits, que fem sense adornar-nos, és objecte de nombroses investigacions en el camp de la psicologia cognitiva contemporània.

Deia Gaston Bachelard (1884-1962) que «els professors de ciències, encara més que els altres si fos possible, no comprenen que no es compregui». <sup>1</sup> Faig meua aquesta reflexió. Malgrat que els diccionaris defineixin la didàctica com l'art d'ensenyar o com la ciència de dirigir i orientar el procés d'ensenyament-aprenentatge, considero que el fet més rellevant que s'esdevé al si de l'escola cal situar-lo en què tothom hi aprèn. L'alumnat aprèn tota mena de competències, de coneixements i de valors, i el professorat aprèn a **comprendre** com es produeixen aquests aprenentatges i a gestionar-los. Aquí és on vull situar el focus de l'assaig.

Per comprendre què balla pel cap de l'alumnat, quan està en mode d'aprenentatge, és imprescindible adoptar una actitud d'empatia cognitiva, i per això cal tenir almenys una mínima teoria sobre els processos cognitius que es produeixen durant la resolució de problemes. Hi ajudarà molt centrar l'atenció docent en els errors que es donen durant cada aprenentatge.

A aquest model mental hi dedico el segon capítol. Manllevaré de la psicologia cognitiva contemporània les característiques bàsiques de les anomenades ment autònoma o inconscient cognitiu, de la ment executiva i de la ment reflexiva. De la primera, em centraré a explicar i detallar amb exemples concrets què són les heurístiques i les analogies, i el paper fonamental que tenen en la resolució de problemes i en l'assaig i error. Quant a la ment executiva, responsable de les accions procedimentals i algorísmiques, hi dedicaré menys espai, atès que és la part de la ment més coneguda. Quant a la ment reflexiva o racional, responsable, entre altres funcions, de l'avaluació i de la presa de consciència dels errors i de la seva gestió, també hi dedicaré un bon espai. No hi faltaran unes quantes reflexions sobre el paper del llenguatge i de les emocions.

El tercer capítol està dedicat íntegrament a les heurístiques, ja que constitueixen el gresol on es generen les estratègies de resolució de problemes i, en conseqüència, també són una font d'errors. En el context d'aquest assaig les heurístiques són equiparables al que comunament s'entén per intuïció. Com que aquestes emergeixen de la ment més profunda, sempre a requeriment de la ment reflexiva o racional, intentaré identificar i definir les que són més freqüents en un context d'aprenentatge STEAM. Les definiré basant-me en casos concrets, tots ells fragments de coneixements curriculars. Identificar quines són les principals heurístiques que fan possible la resolució d'un problema és cabdal per comprendre l'activitat mental i, en conseqüència, són la clau per gestionar els aprenentatges de l'alumnat amb un mínim d'eficiència. Però sobretot és cabdal conèixer-les perquè, com acabo d'esmentar, són la primera causa dels errors d'aprenentatge, i a gestionar-los, és a dir, a treure'n profit cognitiu, hi dediquem la major part del temps de docència. Malament aniríem si no ho féssim així.

El quart capítol està dedicat a les heurístiques errònies, ja que són una valuosa eina didàctica per diagnosticar i avaluar els errors d'aprenentatge. En particular, centraré una part d'aquest capítol en els anomenats biaixos cognitius, un gènere d'heurístiques errònies molt freqüents en la vida mental, la característica principal de les quals rau en què la nostra ment les fa de manera automàtica tot i que això no pressuposa que la ment racional no les pugui avaluar. Tot el capítol es dedica a explorar errors i a caracteritzar-los des de la perspectiva del model mental que s'ha presentat en el segon capítol.

Però el que interessa més d'avaluar els errors és esbrinar la via cognitiva per arribar al coneixement, si no, de què serveix dedicar-hi tanta atenció? Aquesta és la finalitat del cinquè capítol. Després de la presa de consciència de l'error, ens cal entendre'l, és a dir, saber en què ha consistit, i això sovint no és una tasca immediata ni fàcil per a qualsevol aprenent. De fet, identificar l'error esdevé un nou problema que nia en el primer problema. Si es resol bé, el coneixement que se'n deriva alimentarà o formarà part de la nova temptativa, que si reïx facilitarà el pas de l'error al coneixement. Identificar els errors és una capacitat cognitiva que tenim instal·lada en la nostra motxilla mental des de ben petits, si no, que li preguntin a la meua neta.

Una vegada es disposa d'una teoria de la ment, ni que sigui breu, i d'un model cognitiu per transitar de l'error al coneixement, ja s'està en condicions de plantejar un model didàctic per a l'aprenentatge per assaig i error del coneixement. Aquest és l'objectiu del sisè capítol. Es tracta d'un model eminentment constructivista, de manera que es farà necessària una reflexió prèvia sobre la naturalesa del coneixement científic i tecnològic, una reflexió epistemològica a la qual es dedica la primera part d'aquest capítol.

Per tal de comprovar si aquest model didàctic és mínimament operatiu i pot ser útil per a la gestió dels aprenentatges i per dissenyar vies cognitives per aprendre coneixement, en el setè capítol el posem a prova. Com diríem en argot informàtic, el llancem contra el currículum. En concret, sobre tres projectes, un de ciències, un altre de tecnologia i un tercer de matemàtica. I amb això es tanca aquest assaig de didàctica.

Quant al primer capítol, que intitulo «Crònica d'una lliçó», és una mena d'introducció propedèutica a tot l'assaig. És el relat de l'evolució didàctica d'un mateix tema que he treballat al llarg dels anys de docència. Hi despunten totes les qüestions que desenvolupen la resta de capítols.



# 1

## Crònica d'una lliçó

*He cregut convenient exposar-te la particularitat d'un mètode segons el qual et serà possible copsar certes qüestions matemàtiques per mitjans mecànics.*

Arquimedes (III aC). *El Mètode*. Carta a Eratòstenes

*Si vols arribar ràpid, camina sol. Si vols arribar lluny, camina en grup.*

Proverbi africà

L'escenari és una aula de primer d'ESO. També podria ser un sisè curs de primària. És el primer dia de curs. Hi entro atrafegat, carregant la motxilla. Quasi una trentena de cares encuriosides m'inspeccionen i em repassen de dalt a baix. Seuen de dos en dos, per rigorós ordre alfabètic. Vaig directe a la taula del *profe*, teclejo la meva contrasenya a l'ordinador i un moment després a la pantalla que ocupa la meitat de la pissarra apareix el símbol socràtic per excel·lència: un gran interrogant. Tot seguit m'adreço a la classe, em presento i els convido a presentar-se. Mentre es presenten, anoto els seus noms a la plantilla de pupitres de l'aula, la qual cosa em facilitarà memoritzar ràpidament els seus noms. Sempre sap greu no saber-se el nom d'un alumne, i a ell més encara.

—Passarem més o menys unes cent hores junts durant aquest curs —els dic—, ja hi haurà temps de conèixe'ns.

Dedico poc temps a presentar el programa de l'assignatura, tothom té l'horari i sap quina és la meva assignatura. Tot just acabo d'apuntar el darrer nom que ja passejo la mirada, lentament i en silenci, per entre les cares expectants, i l'aturo expressament un instant sobre una dotzena d'ulls curiosos que trio a l'atzar, repartits entre la geografia uniforme de pupitres; després, premo una tecla.

L'interrogant de la pantalla desapareix i mostra una imatge (figura 1.1).

Dit això, de la motxilla en trec un parell de bosses de plàstic transparent que mostro: una conté rajoletes de ceràmica i l'altra, cubets de fusta de pi d'1,5 cm d'aresta. També en surt un plec de fotocòpies. Demano als caps de fila que les reparteixin, mentre jo reparteixo una rajoleta i un cubet a cadascú.

Amb una rajoleta i un cubet entretenint els dits, els alumnes fan una ullada a la fotocòpia, on veuen la mateixa imatge que a la pantalla, però amb un text curt.

—Ja us podeu imaginar què us preguntaré, oi?

Silenci als pupitres. Passen uns segons i una mà decidida s'alça.

—Per què estan posats així? —pregunta.

—Potser perquè al fotògraf li agradava posar-los d'aquesta manera? Potser perquè volia ficar els cubets dins d'una capsca o enrajolar una habitació? Ara em podries preguntar per què ho volia fer, oi?... i no acabaríem mai. Vull preguntes concretes, és a dir, d'aquelles que tenen respostes clares i curtes.

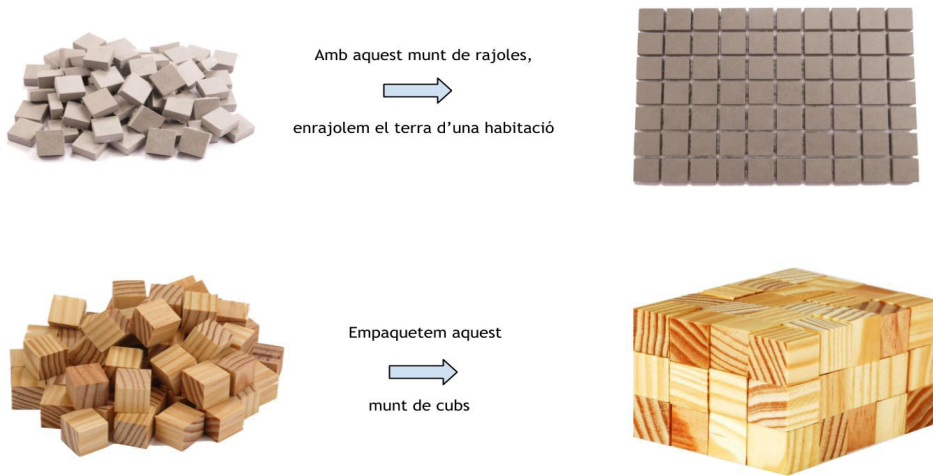


Figura 1.1

—Que hem de comptar quantes rajoles i quants cubets hi ha —intervé una altra veu.

—Premi! Ho has llegit a la fotocòpia?

—Sí.

—Ben fet. ¿Què és més fàcil: comptar els cubets i les rajoles del munt desordenat o comptar-les si estan ben ordenades? Si ordenem objectes és perquè ens és més fàcil comptar-los i endreçar-los. També us demano que justifiqueu els càlculs que fareu. Amb una frase curta n'hi ha prou.

Una mà al mig de l'aula alça una calculadora.

—Podem usar-la?

—Pots ajudar-te del que vulguis: dels dits de la mà i també dels peus, i si no en tens prou, també de la calculadora, del llapis, de la teva intuïció... però sobretot et demano que expliquis per què fas els càlculs que fas i no uns altres. Posem 10 minuts? Ah! Una altra cosa: està prohibit esborrar o ratllar.

—I si ens equivoquem? —diu una veu espontània.

—Cap problema, jo també m'equivoco sovint. Ho poseu entre parèntesis i així jo ho sabré.

Tinc per norma no permetre l'ús de la goma d'esborrar, líquids o cintes correctores a les meves classes, i també ratllar càlculs o textos, els ho demano per tal de llegir amb comoditat els intents, les temptatives o els assajos (digueu-ho com vulgueu).

Tot i el meu prec, seran pocs els qui controlaran l'impuls de ratllar o esborrar els errors per tal d'ocultar-los. Si pretens convertir els errors en tot un esdeveniment important i seriós, la goma d'esborrar o les ratllades es manegen amb més precaució, amb la mateixa cura que la policia científica tracta l'escena del crim.



## La diversitat, sempre sorprenent

Abans de recollir les proves, i ja entrant a la segona part de la primera classe, demano a tothom que digui en veu alta quants cubets i rajoles ha comptat, i demano que algú apunti les quantitats a la pissarra.

Quasi tothom ha comptat correctament les rajoles, multiplicant les columnes i les files rajoles; en canvi, pel que fa als cubets, no. Vet aquí els resultats d'un total de 55 alumnes, de dos grups classe.

N. alumnes	Quantitat de cubets comptats
25	60
5	72
3	20
20	12, 75, 36, 27, 104, 57, 24, 37, 42, 45, 300, 55, 15, 78, 88, 61, 135, 69, 108, 47 (cada resultat correspon a un dels 20 alumnes)
2	En blanc

—Estareu d'acord amb mi —els dic, assenyalant els resultats i ja referint-me només als cubets— que pel fet que hi hagi molta gent que tingui el mateix resultat, no per això aquest resultat és correcte, oi?

Veig un munt de cares estranyades, algunes de les quals deuen de pensar: «de què vas, *profe?*», ja que tot seguit demano que surtin a la pissarra dos voluntaris amb resultats diferents. Unes quantes mans s'han alçat, i en trio dues a l'atzar.

—Quants cubets has comptat, tu?

—72.

—D'acord, surt. Qui no n'ha comptat 72?

S'alcen un munt de mans més.

—Tu mateixa. Quants cubets has comptat?

—60.

—Premi, surts tu. Està clar que tots dos no podeu tenir raó: no hi poden haver 60 i 72 cubets alhora, oi que no? —assentiment general i ambient de desconcert—. No, és clar que no. Aquí només poden passar dues coses: que un els hagi comptat bé i l'altre no, o que tots dos s'equivoquin. El que us demano és que demostreu que l'altre s'ha equivocat comptant els cubets, ja que té una quantitat diferent. Per començar el debat, primer, cadascú explica com els ha comptat i l'altre l'escolta. Tothom pot intervenir per dir-hi la seva, entesos?

Serà un debat únic i irrepetible, i molt instructiu per a tots plegats, i també per a mi.

El timbre toca quan hi ha un munt de paraules demanades i els sembla que el debat no ha arribat a cap conclusió. Els qui han comptat 60 cubets estaven prenent la iniciativa, fent-se escoltar i rumiant un argument definitiu.

—Però qui té raó? —em pregunten.

—Ah, no ho sé! —contesto fent un gest de neutralitat—, jo només soc el *profe*.

De resquitllada veig unes quantes expressions iròniques: «ens has ben ensarronat, *profe*», deuen de pensar.


No caldria dir-ho, però és millor dir-ho: no es poden extrapolar aquests percentatges a cap població escolar. Però si passeu la mateixa prova a alumnes de primer d'ESO, aposto que hi haurà més d'una coincidència.

La gran majoria aquests alumnes, en algun moment o altre de la seva escolaritat, en el cicle superior de primària, hauran d'haver treballat a classe el càlcul del volum d'un ortoedre, i molts hauran retallat un cub desplegat i l'hauran muntat, o com a mínim l'hauran vist en un llibre de text. Qui s'escandalitzi per aquests resultats, li demano que segueixi llegint; tal vegada, al capdavant d'aquest assaig, valori que la situació cognitiva d'aquests alumnes no és tan greu com li pot semblar ara. ¿Qui no s'ha desesperat alguna vegada corregint els exàmens o els treballs del seu alumnat?

### Després de classe...

Una ullada ràpida a una petita mostra de les proves evidencia que no sempre és fàcil descriure un error. No en va diuen que el diable s'amaga en els detalls. Vegem-ne alguns:

#### Alumne D.C.

<p>Operacions:</p> $15 \times 9 \times 12 \times 6$ $\times 6 \times 6 =$	$\begin{array}{r} 15 \\ \times 9 \\ \hline 135 \\ \times 9 \\ \hline 1215 \\ \times 12 \\ \hline 2430 \\ 1215 \\ \hline 16580 \end{array}$	<p>Quants cubs hi ha? 135</p> <p>Explica breument com els has comptat:</p> <p>Multipliqui costats costats</p>	
---	--	---	---


Descripció: quant a la percepció, és possible que D.C. inicialment només vegi tres cares; ho indicarien les tres primeres multiplicacions ( $15 \times 9 \times 12$ ), que poden respondre al fet de comptar els cubets de les tres cares visibles, per bé que un dels factors (el 9) és difícil d'entendre com l'ha comptat. Els tres altres factors ( $6 \times 6 \times 6$ ) potser corresponen a una síntesi de les tres cares «amagades» i al nombre de cares de l'ortoedre. Es llença a multiplicar les sis cares (en diu costats) de l'ortoedre, per bé que repeteix el 9. Però aviat s'adona (és a dir, que ho avalua) que li va sortint una quantitat enorme de cubets, corregeix i posa com a resultat el primer producte, 135, que li sembla més possible o realista.

#### Alumna C.P.

Descripció: sembla que C.P. primer percebi les sis cares de l'ortoedre i ignori l'interior, compta els cubs de cada cara i els suma, per bé que se'n descompta una (en suma cinc) i s'embolica comptant els cubets d'una cara ( $4 \times 4$ ). Ratlla tota la suma i l'explicació. Alguna cosa sense explicitar la fa canviar i avalua com a errònia la primera temptativa. Rectifica i aplica la fórmula del càlcul de volum.

Operacions:

Quantos cubs hi ha? 70



Explica breument com els has comptat:

denies he anat multiplicant els cubs que hi ha en la fila d'adalt amb la d'abaix i després he he sumat tot.

També he multiplicat l'alçada per l'ample i després per la profunditat.


②  $3 \times 4 \times 5 = \cancel{60}$   $\begin{array}{r} 12 \\ \times 5 \\ \hline 60 \end{array}$

### Alumna D.R.

Descripció: sembla que D.R. imagina les sis cares de l'ortoeidre, però sembla que ignori l'interior i, a més, les veu totes iguals; creu que es troba davant d'un cub.

Operacions:

Quantos cubs hi ha? 72



Explica breument com els has comptat:

He comptat una cara del cub i he multiplicat per 6


$\begin{array}{r} 12 \\ \times 6 \\ \hline 72 \end{array}$

De l'aula estant detectem errors en les activitats dels nostres alumnes ja que nosaltres coneixem «la veritat» i la podem contrastar amb el que fan. Hi ha errors que són de difícil interpretació cognitiva, són autèntiques caixes negres. D'altres no, perquè manifesten amb claredat les causes de l'error.

Quan l'error és enrevesat, la descripció no és gens fàcil. Si no ho teniu clar, proveu de descriure els de l'alumne F.O.:<sup>2</sup>

Operacions:

Quantos cubs hi ha? ~~35~~ 108 cubs



Explica breument com els has comptat:

He comptat els cubs d'abaix: he multiplicat per els del costat i el resultat ho he multiplicat per 9 hi m'ha donat 108.

$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \end{array}$   $\begin{array}{r} 12 \\ \times 9 \\ \hline 108 \end{array}$

### Tothom mira el mateix, però tothom ho veu igual?

Paga la pena aturar-se una mica en el tema de la percepció. Els sentits són la nostra finestra al món i ens proporcionen la matèria primera per construir el nostre coneixement de l'entorn. La percepció és **més** que un simple registre de sensacions: implica

interpretar informació, que sovint és ambigua o insuficient, com és el cas d'aquesta fotografia del paquet ortoèdric dels cubets: només es presenten tres cares a la vista, i en dues dimensions. No és així en el cas de les rajoles. La finalitat de la percepció visual és arribar a comprendre què veuen els nostres ulls.

En psicologia de la percepció hi ha un principi sòlidament establert segons el qual un acte de percepció implica dos processos simultanis que interactuen entre ells:

- Els processos **de baix a dalt**: són les sensacions que entren a través dels nostres sentits. Aquests processos estan guiats per la informació sensitiva procedent de l'entorn físic. En el cas dels cubets, la informació sensitiva només ens informa de tres cares.
- Els processos **de dalt a baix**: que busquen activament i extreuen informació de les sensacions. Aquests processos estan guiats pel nostre coneixement, les nostres creences, expectatives i objectius. En el nostre cas, i depenent del coneixement que en tinguem, podem veure-hi una forma ortoèdrica, o no, i si el seu interior està buit o no.

Els processos de dalt a baix controlen i governen la dinàmica de la percepció. El que sabem governa les nostres percepcions, de manera que les percepcions són **interpretacions**, representacions de la imaginació produïdes per la interacció entre els dos tipus de processos.

En el cas dels cubets, la fotografia presenta una evidència explícita que no abasta la totalitat de l'objecte. En canvi, en la fotografia de les rajoles la totalitat de l'objecte és una evidència explícita. Els processos de dalt a baix completen l'objecte, i això implica que d'alguna manera extreuen el patró de l'objecte<sup>3</sup> de la seva memòria i mobilitzen la imaginació per representar-lo.

En fi, sigui quina sigui la percepció de cada alumne, és evident que tindrà les seves conseqüències i condicionarà l'estratègia per resoldre el problema, malgrat que, com mostren algunes de les proves, percebre completament el patró ortoèdric tampoc serà garantia de sortir-se'n.

De tot plegat se'n deriva una regla per a una bona pràctica docent: quan expliques o mostres qualsevol cosa, assegura't, mitjançant preguntes directes a diferents alumnes, que tothom veu o entén allò que tu vols. De manera que cada percepció concreta ha d'estar explicitada en el model cognitiu-didàctic que maneges.

## Construir coneixement: la didàctica

L'endemà toca laboratori amb mig grup. És la segona classe. Ja hi ha preparades una quinzena de safates plenes de cubets. Reparteixo les proves d'ahir i una safata per a cada persona.

—Si teniu un signe d'exclamació a la vostra prova—explico— vol dir que estic d'acord amb el vostre resultat. Un interrogant que no. Tots teniu una safata amb 60 cubets. Els qui teniu una exclamació, heu de resoldre el problema següent: esbrinar quants paquets de mides diferents poden fer-se amb 60 cubets, i fer-ne un dibuix amb les mides corresponents. I els qui teniu un interrogant, heu de muntar el paquet de la fotografia de la prova amb els cubets de la safata.

A partir d'aquest moment entrem en territori didàctic. Una observació atenta ha de distingir, d'entre totes les vies cognitives que es poden mobilitzar per empaquetar els cubets, quina esdevindrà el coneixement que anomenem càlcul del volum d'un ortoedre.

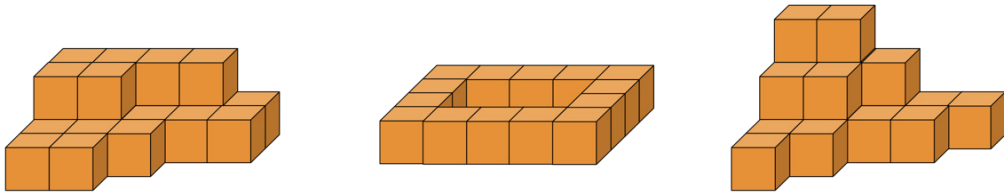


Figura 1.2

De bon començament, tothom apila els cubets de manera poc o gens sistemàtica, és a dir, sense seguir una pauta regular. La figura 1.2 mostra tres de les moltes maneres de començar a apilar cubets per formar el paquet fotografiat. De vegades s'observa que es comença amb una pauta i es continua amb una altra de ben diferent. També procedeixen d'aquesta manera la majoria dels alumnes que han superat la prova i que cerquen altres construccions ortoèdriques diferents a la de  $3 \times 4 \times 5$ .

Es pot dir que aquesta és una manera de construir a la babalà, sense ordre ni concert, simplement s'apilen cubets amb l'única condició de fer la pila de la fotografia, tot muntant parets rectes. És a dir, l'ordre en què es col·loquen importa ben poc. Són procediments espontanis que no tindrien cap mena d'importància si no fos perquè ens obren la porta a un petit descobriment didàctic referit a la percepció analítica del paquet ortoèdric que facilita la comptabilitat i obre les portes a la construcció del coneixement del càlcul del volum de l'ortoedre.

Fixeu-vos que en aquestes construccions espontànies no hi ha cap criteri d'eficiència organitzativa, l'única relació percebuda entre els cubets és la de **veïnatge** i hi ha un únic atribut de pertinença perquè només hi ha una sola categoria, a saber: el paquet. Amb això vull dir que un cubet qualsevol no és membre de cap fila ni de cap capa, simplement perquè, ara per ara, aquestes categories no existeixen en la ment del subjecte. Per tant, no es pot generar un procediment o algorisme que impliqui ni una comptabilitat ràpida ni una construcció eficient.

No obstant això, la reproducció, en real, de l'empaquetament que mostra la fotografia la completen amb èxit tots els alumnes que no van reeixir en la prova. Amb aquests alumnes, ara amb el paquet ja fet entre mans, els comptem de manera eficient i organitzada, i **desconstruïm** analíticament el paquet en plantes, files i cubets.

Els cinc últims minuts de classe fem una posada en comú i apuntem les dimensions dels diferents paquets que s'han trobat de manera empírica. No tots els alumnes han fet exactament la mateixa activitat, per bé que totes giraven al voltant dels empaquetaments ortoèdrics.

A la classe següent, la tercera, cadascú disposa d'ordinador portàtil connectat al núvol de l'institut. Obro l'eina de dibuix del Drive i plantejo el repte següent:

—Heu de dibuixar el paquet de  $3 \times 4 \times 5$  cubets. Ahir, al laboratori, ho va fer amb cubets reals, ara s'ha de fer amb cubets virtuals. Es tracta de fer-ho amb el mí-

nim d'accions possible, és a dir, molt ràpid i a partir d'un sol cubet, a cop de còpies, d'agrupacions i d'arreglar cubets, files i capes (figura 1.3).

Passada una estona durant la qual he passejat entre pupitres i alumnes emboscats rere les pantalles dels ordinadors, insisteixo en què si es vol ajustar bé els cubets entre ells, cal moure'ls a poc a poc, i combinar la tecla de les majúscules amb les fletxes. Remato la classe amb la fórmula del càlcul del volum d'una capsa de forma ortoèdrica:  $V = l \times a \times h$ .

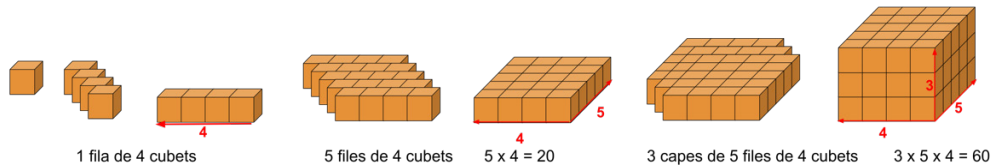


Figura 1.3

L'ús d'aquest recurs digital permet a l'alumnat **executar** aquest procediment amb eficiència constructiva i comprendre que l'estructura cubet-fila-capa atorga una nova propietat a cada cubet —respecte a la del veïnatge que esmentava abans—, ja que ara pertany, o està integrat, a una fila i a una capa. A més, i de retruc, aquesta estructura reforça la representació de l'espai tridimensional.

És pertinent ressaltar el caràcter **recursiu** d'aquesta construcció. Es qualifica de recursiu a tot procés en què s'aplica de nou al resultat d'haver-lo aplicat prèviament. En el cas de la construcció de l'ortoeidre que ens ocupa, la recursivitat consisteix a fer còpies d'una peça i agrupar-les per arrelament perquè esdevingui una peça nova, tenint en compte que s'arreglaren successivament en sentit longitudinal, transversal i vertical. Aquest és, per posar-ne un cas, el mètode d'agrupació d'objectes del nostre sistema de numeració.

És un mètode molt efectiu. Només caldria comparar, i sense cronòmetre, el temps necessari per muntar el paquet de cubets fent-ho d'aquesta manera i no de qualsevol de les maneres «espontànies» que feien ahir, quan apilaven cubets reals, com les de la figura 1.2. Per molt trivial que pugui semblar que cada cubet n'hi dins d'una fila dins d'una planta en forma ortoèdrica, és evident que és una estructura que no està present de manera natural i espontània en la ment de ningú. La recursivitat és un dels processos cognitius més usats amb què construïm coneixement (Piaget, 1975; Corballis, 2007).

En copsar aquesta estructura, els nois i les noies prendran consciència d'haver descobert alguna cosa (el 3 de 5 de 4), com si dels seus dits, que controlen l'acció del cursor, aparegués una sorpresa, talment la moneda que el prestidigitador treu del no-res, que coordina simultàniament dos productes. D'aquesta manera s'entén que la didàctica consisteix, bàsicament, en la planificació d'una via cognitiva que porta cap a una descoberta, una via sempre i necessàriament fressada per l'assaig i l'error.

La ment racional és la que opera en els dominis de la consciència, la responsable de declarar aquesta descoberta com a coneixement. Però l'esclat de clarividència, el llampegueig comprensiu de coordinar el 3, el 4 i el 5 en un sol producte, no l'ha generada la consciència, sinó l'àmbit mental que la psicologia cognitiva contemporània anomena l'inconscient cognitiu o ment autònoma, que en un sol instant creatiu ha coordinat un munt de connexions de la memòria associativa.

A la teoria de la ment hi dedicaré el proper capítol. La capacitat docent d'imaginar què els balla pel cap, tant en els moments de l'èxit cognitiu com en els del fracàs, que és imprescindible per assolir la necessària empatia cognitiva amb l'alumnat.

## Un error memorable

La proposta de la classe següent, la quarta, va consistir a fabricar una capsa de paper per ficar-hi els 60 cubets. A la pantalla del projector de classe hi apareix una fotografia (vegeu la figura 1.4) i a les taules dels alumnes, un cubet, diversos fulls DIN A4 amb un quadriculat d'1,5 x 1,5 cm (la mida dels cubets), tisores, regle, llapis i una barra de pega. Per descomptat, no els facilito la plantilla del desenvolupament de la superfície de l'ortoedre.

—Suposo que alguna vegada heu retallat la plantilla d'un cub desplegat i l'heu muntat —els assenyalo el que hi ha desplegat sota els cubets—. El que heu de fer avui és una capsa per ficar-hi els 60 cubets, tal com mostra la fotografia. Entesos? Si us plau, poseu un cubet sobre un quadradet de la fotocòpia, hi encaixa?

—Sí —contesten algunes veus.

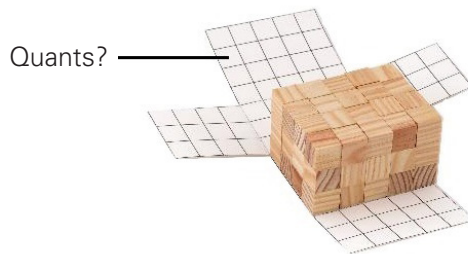


Figura 1.4

—Per cert, algú em pot dir, abans de retallar i de muntar la capsa, quants quadrats de paper tindrà la superfície de la capsa?

—Seixanta! —contesten immediatament i a l'uníson un munt de veus.

—Em deixeu parat, teniu una calculadora als ulls? —els dic, aparentant sorpresa—. Quan tingueu la capsa feta, ja veurem si aquesta calculadora mental és tan exacta com ràpida. De moment, dibuixeu la capsa desplegada, retalleu-la i munteu-la. Disposeu de tants fulls quadriculats com necessiteu.

En tenen per estona, i no tots se'n sortiran en una hora.

Centrem-nos un moment en aquest **seixanta**. Intueixo que si es fa la mateixa activitat amb una mostra representativa de la població escolar de primer d'ESO i es planteja la mateixa pregunta, aquesta seria la resposta majoritària. El que més sorprèn és la rapidesa i l'espontaneïtat de la resposta col·lectiva, és a dir: que hi ha tants quadrats com cubs. És una evidència i no han fet cap esforç cognitiu per respondre **seixanta**. Una matisació important: aquest «esforç» no té res a veure amb l'anomenada cultura de l'esforç.

És clar que és una resposta intuïtiva i espontània, una **heurística** que intenta resoldre el problema plantejat. Hi ha qui malfia de la intuïció perquè, certament, és una font prolífica d'errors, però també ho és d'encerts, de manera que caldrà ser justos

en la valoració que puguem fer. Respostes intuïtives com aquesta sovintegen en tota mena d'aprenentatges i cal dedicar-hi molta atenció docent perquè, ben analitzades i emmarcades en una teoria de la ment adequada, a la qual dedicaré el capítol següent, fonamentaran la proposta didàctica que desenvolupa aquest assaig.

Més d'un docent confirmarà, per experiència pròpia, relats semblants. Sovint el grup d'alumnes contesta massivament a una qüestió i dona una resposta que a primera vista sembla evident i després resulta que no és la correcta. Les preguntes trampa són un bon recurs didàctic per fer-nos rumiar a tots plegats, alumnes i professors.

És tracta d'un error? Evidentment que ho és. La qüestió és com interpretar-lo, sense precipitar-nos a atribuir-lo a una simple confusió de percepció entre cubs i quadrats. És clar que hi han d'intervenir els processos perceptius que ja hem apuntat, altrament no seria possible l'activitat, però el sentit de la pregunta (quants quadrats de paper tindrà la capsa?) ha estat prou reforçada amb la imatge del desplegament de la capsa perquè la immensa majoria dels alumnes entenguin bé què se'ls demana.

Els testimonis d'aquesta mena d'errors massius i espontanis coincideixen en què són respostes automàtiques. Si disposéssim d'un enregistrament, veuríem que la resposta espurneja als ulls dels alumnes uns instants abans de què el professor acabi de dir la pregunta. Com si totes les ments haguessin actuat, des del punt de vista cognitiu, a l'uníson, com tallades per un mateix patró.

Pel que fa a l'esfera emocional, crida l'atenció, si n'ets testimoni directe, l'expressió de felicitat complaença en les cares de la classe en els breus instants en què pronuncien la resposta. Es copsa en les seves cares una manifestació d'afirmació i de seguretat d'haver donat la resposta correcta. Vaja, que n'estan ben convençuts: no hi ha dubtes que entelin la resposta. Fa goig veure tanta il·lusió i fins i tot sap greu contradir-los. Tenen tanta força les il·lusions cognitives, que no recordo cap alumne que em digués: «espera un moment *profe*, que no es poden comptar de cop».

Si en una cosa és especialista l'error és que és molt discret i silenciós. Per experiència tothom sap que quan ens equivoquem, en aquell instant, mai no en som conscients. En el capítol dedicat a l'exploració d'errors hi aprofundiré, en aquesta mena d'errors.

## Errors latents i errors eruptius

Continuem amb la lliçó: muntàvem la capsa  $3 \times 4 \times 5$  per contenir-hi els 60 cubets. Per descomptat, els alumnes no tenien la plantilla de l'ortoedre desplegat, només fulls quadriculats, llapis, regla, pega i tisores, i, és clar, les dimensions de l'ortoedre que ja coneixen.

Sense la plantilla de l'ortoedre desplegat i sense el patró a la pantalla del projector, els alumnes van obligats a concebre-la i a dibuixar-la. Vet aquí un problema obert que ve determinat per les possibilitats de triar una cara i decidir-se per una de les quatre adjacents, per continuar el desenvolupament.

No és el mateix tenir l'ortoedre construït davant teu i fer-lo servir de model per dibuixar el desplegament que disposar només de la informació numèrica de les seves dimensions; es produeixen més errors i en podem treure més profit.

El desplegament de la figura 1.5 és d'un dels errors més freqüents —en el dibuix m'he estalviat les pestanyes—. Les línies trossejades indiquen els doblecs que delimiten les cares.



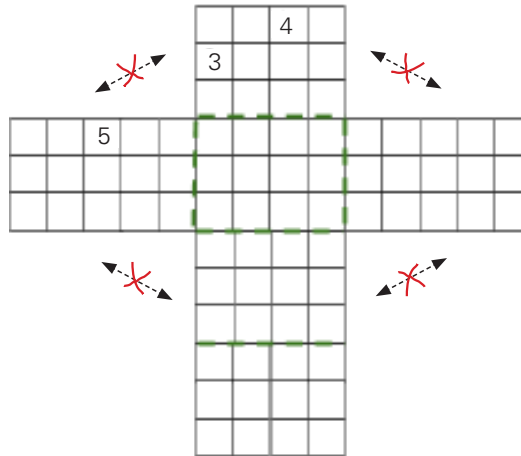


Figura 1.5

Fixeu-vos en els costats assenyalats, que no encaixaran en muntar-lo.

Després de retallar el desplegable, quan s'intenti muntar el subjecte s'adonarà que els dos costats (5 i 3) no encaixen. En aquest cas, l'error prové del propi objecte. I quan això s'esdevé, ho fa d'una manera eruptiva, clara i rotunda, que no admet dubtes: el desajust entre les dues arestes que s'han d'encolar és una prova fefaent que hi ha un error.

Al subjecte se li fa evident que ha comés un error en el desplegament de l'ortoedre, i la presa de consciència és immediata. No hi ha lloc per a la il·lusió cognitiva, perquè s'ha desfermat un conflicte cognitiu ineludible i explícit.

En canvi, en la prova dels cubs empaquetats, els errors no poden emanar directament de la manipulació real de l'objecte ja que, per la pròpia naturalesa de l'activitat, només s'hi actua mentalment, amb el pensament, de manera que l'emergència d'un conflicte cognitiu no serà immediata. La presa de consciència de l'error per part del subjecte no té el caràcter eruptiu de l'activitat anterior, sinó unes altres característiques que admeten més matisos.

Si hi ha conflicte cognitiu, és el pensament racional qui és interpel·lat a resoldre'l. D'una manera o altra s'espavila per avaluar constantment si el que fa s'ajusta o no als seus objectius, és a dir, es retroalimenta contínuament del resultat de la pròpia acció i no pot deixar de fer-ho, és un mecanisme arrelat en la nostra ment que l'evolució ha posat a la nostra disposició. En aquesta qüestió hi entrarem a fons en el proper capítol.

Paga la pena col·leccionar errors dels teus alumnes, per investigar-los. Es pot pensar que la finalitat d'estudiar els errors dels alumnes és millorar els mètodes didàctics i disminuir la freqüència amb què es produeixen els errors, és a dir, per tractar de millorar els aprenentatges de l'alumnat de manera que s'equivoquin menys. Crec que aquesta és una creença ingènua, perquè ningú ni res ens lliurarà d'aprendre per assaig i error. Cal aprendre a equivocar-se.

El domini dels errors coincideix amb el de l'aprenentatge. És un aspecte molt ampli i ocupa, i malament si no ho fa, una bona part de la feina docent a l'aula. La quantitat d'errors que s'hi produeixen diàriament és ingent. Hi ha una *big data* dels errors escolars que espera ser investigada en benefici dels futurs professors.

## La llavor d'un fracàs didàctic

Entrem a la cinquena classe i continua la crònica. Durant uns quants cursos he treballat el tema «Forma, volum i superfície», on s'integren les activitats que hem vist fins ara i que continuava amb el problema següent:

Construeix una capsa de  $64 \text{ cm}^3$  de volum, gastant el mínim de cartolina.

Se sobreentén que la capsa té forma ortoèdrica i unes dimensions mesurables en nombres naturals. És un problema que demana el seu temps i que pertany a la classe de problemes en què, per arribar a la solució, cal resoldre prèviament una seqüència ordenada de petits problemes amb objectius ( $O_i$ ) més senzills i que nien en el primer. Dit d'una manera més planera, l'estratègia de resolució és aquesta: si vull saber això, abans he de saber allò; per saber allò, abans he de saber... etc., de manera que es comença la resolució del problema ( $S_i$ ) per l'últim objectiu definit.

La capsa que gasta menys cartolina és la que té menys superfície.

$$O_F \downarrow \uparrow S_{F-2}$$

Cal saber la superfície de totes les capses amb volum  $64 \text{ cm}^3$ .

$$O_{F-1} \downarrow \uparrow S_{F-1}$$

Cal esbrinar totes les ternes de nombres naturals amb producte 64.

$$O_{F-2} \downarrow \uparrow S_F$$

Cal esbrinar tots els divisors de 64.

La dinàmica cognitiva que requereix aquest problema no és simple per a nois i noies de primer d'ESO. És un problema llarg i feixuc. El cas és que, per a mi i per a la majoria dels meus alumnes, esdevenia una activitat tediosa i no exempta de complicacions. L'activitat requeria una intervenció constant per part meva a fi d'orientar els que s'extraviaven en la complexitat del problema i es desanimaven, de manera que calia engrescar-los. Costava déu i ajut que tothom tingués clares les fases de l'estratègia de resolució, que esbrinessin totes les ternes de nombres naturals amb producte 64, que les ordenessin bé, que dibuixessin bé tots els desplegament de les capses per tal de calcular-ne la superfície; en fi, que tot plegat es feia llarg i laboriós.

N'eren tantes i constants, les meves intervencions, unes individuals i altres per a tot el col·lectiu, que l'activitat era quasi una lliçó magistral, frenètica i plena d'interrupcions, la qual cosa també em desanimava a mi. No és una bona pràctica docent: per treballar bé i tranquil a l'aula, has de parlar poc i les explicacions docents han de ser poques i mínimes, però l'entorn experimental ha de ser ben ric. Curs rere curs se'm feia evident que no havia encertat l'enfocament del problema ni tampoc havia trobat la clau de la motivació, tot i que el problema m'agradava i es podia eixamplar cap a la relació entre forma i volum tant en àmbits de la naturalesa com de la tecnologia. Em refereixo, per exemple, a les formes que contenen el màxim de volum en la mínima superfície (ous, bombolles, etc.) o l'eficiència energètica d'un habitatge segons la seva forma exterior i el volum interior.

En un curs, mentre un alumne llegia l'enunciat del problema i jo l'escoltava sense gaire convicció, i conscient del poc entusiasme que despertava entre les noies i

els nois, la necessitat de superar aquella atonia generalitzada sens dubte m'estimulà la imaginació. No vaig canviar el problema, sinó que el vaig integrar dins un relat, l'argument del qual se m'acudí en aquell moment a la vegada que donava un tomb a la dinàmica del grup.

En un tres i no res em vaig inventar (una espurna imaginativa) un context narratiu i social per al problema. Oli en un llum: l'activitat va funcionar i la motivació va anar més enllà del que jo havia intuït en un primer moment. Ja ho diu la dita: la inspiració existeix, però t'ha de trobar treballant.

La conclusió que en vaig treure va ser que, tot i que disposava d'un primer model cognitiu, a l'activitat li mancaven dues dimensions didàctiques imprescindibles:

- Un relat per activar la imaginació, és a dir, perquè l'alumnat interioritzi el problema tot assumint i representant un paper actiu.
- Integrar el problema en un context social creïble, de manera que tingui sentit plantejar l'activitat com a projecte col·laboratiu.

## La fàbrica de capsas

Vet aquí el relat, que vaig redactar després d'improvisar-lo per engegar l'activitat.

Un fabricant de daus arriba al polígon industrial de l'institut, on diverses empreses es dediquen a l'embalatge.

Visita la vostra empresa i us fa la comanda següent:

—Jo fabrico daus d'un centímetre cúbic i els vull empaquetar en capsas de 64 daus. Què m'oferiu?

—I com voleu que sigui la capsas? De quines mides? —li pregunteu.

—No ho sé —contesta ell—, però crec que hi ha d'haver unes quantes capsas, de formes diferents, que puguin contenir els 64 daus, vull dir que cadascuna d'aquestes capsas tindrà mides diferents, de manera que necessito que em digueu totes les capsas possibles, per decidir-me.

—D'acord, d'aquí uns dies li escriurem i li direm quantes formes de capsas possibles hi ha que puguin contenir exactament els 64 daus.

—D'acord, però tingueu present que jo soc una persona molt pràctica i vull veure els dibuixos de les capsas amb les mides, i també vull tocar les maquetes de totes les capsas.

—Cap problema, li farem un dibuix i una maqueta de cada capsas, i així podreu decidir.

—Entesos, però com que hi ha molta crisi només compraré la capsas més barata, però la vull amb un disseny original.

—Cap problema, ja us direm quina és la més barata i us proposarem uns quants dissenys perquè trieu el que més us agradi.

Pocs dies després, el fabricant de daus va tornar i cada empresa ja havia preparat un mural amb els càlculs, els plànols de cada capsas amb les maquetes respectives, i ja sabien quina era la capsas més econòmica.

El paper del fabricant de daus em corresponia a mi, i el de les empreses, als alumnes.

## Entorns d'aprenentatge

La geografia uniforme de les fileres de pupitres de l'aula mudà cap a una distribució irregular de taules en què cada tres o quatre s'agrupaven per representar una empresa i tota l'aula esdevingué un polígon industrial format per diverses empreses dedicades a l'embalatge.

Es van muntar els equips humans de les empreses seguint un procediment senzill; a l'atzar, tres nois i tres noies van assumir el paper de caps d'empresa i van triar el seu equip: per torns, ara un noi, ara una noia. Són moments plens d'excitació col·lectiva. Constituïdes les empreses, cadascuna cercà un nom i un símbol, i obria un document en el núvol digital de l'institut, que compartien amb el client.

A la classe següent ja se'm va sentir poc, tant sols vaig explicar l'esquema de la resolució del problema i la necessitat d'organitzar-se, de repartir-se el treball i de contrastar amb els companys de l'empresa el treball que un fa.

Com a client, em passejava pel polígon industrial simbòlic ple de tisoires, cartolines, pegues, regles, escaires, etc. I era exigent: tan aviat volia que em justificuessin els càlculs com que em presentessin les maquetes de les capsas ben acabades. Tot començava a rutllar, i la simulació era tan realista que fins i tot van aparèixer els primers conflictes entre membres d'una mateixa empresa, així que també em va tocar exercir el paper de mediador i d'àrbitre.

Immersos en aquest projecte col·laboratiu, els aprenentatges van adquirir una dimensió més enllà de la pura geometria i del càlcul, ja que eren coneixements amb un valor d'utilitat social, de manera que simulaven un context econòmic si no real almenys virtual.

Per descomptat, els errors brollaven per arreu del polígon industrial, i a cada empresa era una deu d'errades. Errors en l'organització dels càlculs, errors en la confecció dels desplegaments de les capsas, errors de tota mena, alguns repetits i d'altres ben singulars, i calia estar amatent a tot plegat. I, en un moment o altra, es van adonar de l'error col·lectiu que he esmentat abans: quan es calcula la superfície de cada capsa es fa evident que la mesura de la superfície no coincideix numèricament amb la del seu volum. Les causes d'aquest error les desgranaré en els capítols dedicats a l'error.

La solució a què havien d'arribar, és a dir, la capsa que gasta menys cartolina, té una forma cúbica,<sup>4</sup> de  $4 \times 4 \times 4$ . Com a corol·lari cognitiu del problema, després d'haver calculat la superfície d'unes quantes capsas a partir de les dimensions de cadascuna de les sis cares, es van adonar que hi havia un algorisme més ràpid per calcular-la d'un sol cop.

L'activitat va destacar el paper de l'equip en la presa de consciència individual dels errors i en eliminar-los. I aquí rau una de les claus de l'eficiència de l'aprenentatge en col·laboració.

De tots els reptes de la didàctica, trobar un relat potent amb capacitat d'integrar coneixements i de generar un projecte amb una dimensió social és, almenys per a mi, el més bonic i estimulador de tots. No cal dir que l'ambient a l'aula, en general, fou engrescador i ens va deixar a tots plegats una bon record.

La fàbrica de capsas pot expandir-se si s'enfoca i s'obre cap al disseny d'embalatges per a altres objectes, de manera que la fàbrica de daus també pot ser una granja d'ous, posem per cas. Només cal anar a un supermer-

cat i triar un dels embalatges de mitja dotzena d'ous, portar-lo a l'aula i examinar-ne el disseny. Vegeu la figura 1.6: un disseny que no necessita cola per enganxar les cares i muntar la capsa, que no usa plàstic i que es molt pràctic per apilar.



Figura 1.6



Figura 1.7. Font: <https://www.behance.net/gallery/34869269/Good-Hair-Day-Pasta>

I encara pot ampliar-se més si connecteu amb les matèries de visual i plàstica, i llengua (llenguatge i publicitat). Si investigueu dissenys d'embalatge per Internet trobareu autèntiques joies que combinen el producte amb l'embolcall de manera molt suggeridora (vegeu la figura 1.7). També trobareu bona bibliografia per proporcionar a l'alumnat models desplegable (Jackson, 2012) que alimentaran la imaginació de nois i noies. Fins aquí, la crònica d'aquesta lliçó, que es va anar refent durant uns quants cursos i que la darrera vegada que la vaig fer va durar una dotzena d'hores lectives.



# 2

## La ment del geni

*El primer era no acceptar mai cap cosa com a vertadera sense conèixer evidentment que ho fos; és a dir, evitar acuradament la precipitació i la prevenció, i no incloure en els meus judicis res més que allò que es presentés al meu esperit tan clarament i tan distintament que jo no tingués cap motiu de posar-ho en dubte.*

**René Descartes (1637)**

*Primera regla del Discurs del Mètode*

*Un dia, mentre caminava sobre el penya-segat, se'm va acudir la idea, de nou amb les mateixes característiques de concisió, brusquedat i certesa immediata.*

**Henri Poincaré (1908)**

*Ciència i mètode*

*Tan segur és que la mà parla amb el cervell com que el cervell parla amb la mà.*

**Frank R. Wilson (1998)**

*La mano*

A la pantalla del laboratori es projecta el dibuix d'un iceberg. A les taules, cada grup té una proveta de 10 ml amb aigua glaçada i colorada, acabada de treure del frigorífic. El nivell del gel sobrepassa el nivell dels 10 ml. També hi ha un recipient ple d'aigua amb un glaçó flotant, que representa un microiceberg. També disposen d'una balança.

Dies enrere hem treballat la descoberta del principi d'Arquimedes i hem relacionat la flotabilitat d'un cos amb a la seva densitat.

—Primer de tot peseu la proveta amb l'aigua congelada —els demano—, i anoteu-ne el pes i el nivell del gel, que ara sobrepassa els 10 ml, i controleu el vostre microiceberg. Mentre esperem que el gel de la proveta es descongeli parlem una mica dels icebergs. El vostre petit iceberg es comporta igual que un de gran. Està ben clar que el gel flota sobre l'aigua i també que el gel és aigua congelada. Ningú no hi té cap observació a fer, no hi ha res d'estrany?

Silenci. Algunes cares expectants em miren i algunes m'interroguen. Què hi ha d'estrany, *profe*, en un glaçó flotant? Però jo també callo i passejo la mirada per les clepses. Ja m'agradaria saber què hi balla al dedins de cada una d'elles. A la fi, una veu s'arrisca a parlar.

—Que a la foto hi falta el Titànic.

Riure generalitzat, que se m'encomana.

—Després et passo la foto i l’hi pintes. Però segur que el capità del Titànic sabia per què els icebergs floten malgrat que són d’aigua, o el gel no és aigua?

—Que l’aigua no flota —intervé una altra veu, amb la llumeta de la intuïció als ulls.

—Precisa una mica més —li demano.

—Doncs que si el gel és aigua, no hauria de flotar, s’hauria de quedar entremig, sota l’aigua però sense enfonsar-se del tot.

—Això que dius es pot convertir en una bona pregunta —li reconec—. Empenteu avall el gel i tornarà a pujar. És evident que flota. Té misteri o no?

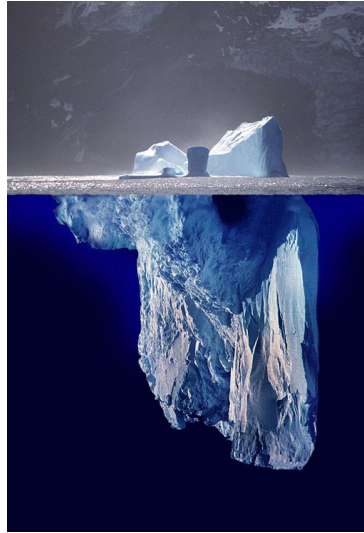


Figura 2.1. Font: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Iceberg.jpg>

Unes quantes consciències interroguen la seva ment profunda, a la recerca d’una explicació que trigarà a sorgir. La màquina associativa està treballant a tot gas cercant connexions significatives. Unes altres ments romanen a l’expectativa, a veure què es diu.

—Com està la proveta, ja s’ha descongelat? —pregunto.

—Encara hi ha gel.

—Mireu bé la proveta, hi noteu alguna diferència respecte al començament.

—Que va perdent aigua, abans marcava més de 10 ml i ara en marca menys.

—Com saps que perd aigua? —pregunto—. Com ho pots comprovar?

—Pesant-la una altra vegada —contesta una veu veïna.

—Peseu-la.

Pesen de nou la proveta, i es veuen alguns gestos d’estranyesa.

—Pesa igual que abans —corroboren unes quantes veus.

—I doncs, què passa? —els interpel·lo.

—Que l’aigua es fa més petita? —pregunta una veu insegura.

—La idea es bona, però no has triat la paraula adequada.

—Que el gel ha perdut volum —afegeix una altra veu.

—Vaja, que quan l’aigua es congela...



—Que augmenta de volum —unes poques veus però a l'uníson completen la frase.  
—El misteri de l'iceberg es va aclarint. La clau sembla ser l'augment de volum del gel de l'aigua quan es congela. El pes es manté, però si el volum augmenta, llavors...  
Un munt de caps assenteixen amb naturalitat, esperant que continuï l'explicació, però no em correspon a mi desvetllar tot el misteri...  
Quan el laboratori es buida, mentre espero el grup següent, amb qui repetiré la mateixa lliçó, em quedo pensant tot contemplant la imatge de l'iceberg, que se m'afigura com una metàfora de la ment humana.

## Una mica de psicologia cognitiva, si us plau

L'empatia és la facultat de comprendre els sentiments i les emocions dels altres. Si les comprens és perquè pots interpretar-les en els gestos i en les expressions, i això és possible perquè les coneixes i en tens experiència. L'actitud empàtica està considerada com un dels puntals de l'acció pedagògica.

El significat més comú de l'empatia fa referència a les emocions i prou se sap que aquestes tenen un paper determinant en els aprenentatges. No obstant això, en l'àmbit pedagògic, l'empatia també té una dimensió cognitiva o epistemològica. Vull dir que no només necessites comprendre com i què senten els teus alumnes mentre aprenen, sinó que també has de comprendre com i què pensen.

De la mateixa manera que la punta de l'iceberg emocional són els gestos i les expressions, la punta del pensament de les noies i els nois són les seves produccions intel·lectuals i materials. Tot allò que es pensa és fruit d'un procés cognitiu que és intangible i no es pot observar directament, almenys fins on jo sé. De manera que si volem comprendre com i què pensa un alumne concret mentre resol un problema, no tenim més alternativa que conjecturar a partir de les seves produccions, és a dir, de tot allò que fa i expressa de manera observable.

L'empatia cognitiva és tot un repte per a la didàctica. En la mesura que entens què balla pel cap del teu alumnat mentre aprèn, podràs optimitzar la teva estratègia didàctica. És difícil, per no dir impossible, conjecturar sobre els processos cognitius que tenen lloc en la ment sense disposar d'un model teòric sobre ells, ni que sigui esquemàtic. A això hi dedicaré aquest capítol i deixo per al següent el model d'aprenentatge per assaig i error que se'n derivarà.

Es tracta de conceptes poc estesos pel territori escolar, però que pertanyen a un dels paradigmes bàsics de la psicologia cognitiva contemporània (Stanovich, 2011; Kahneman, 2011; Gigerenzer, 2007; Gilovich, 1991; Gladwell, 2005; Evans, 2010; Keith, 2010; Piattelli, 1993; Tubau, 2005). Aquest paradigma estableix que en la nostra ment operen **dos sistemes cognitius** quan som interpel·lats a resoldre un problema, a raonar, a prendre una decisió, a emetre un judici o a elaborar una conjectura. Per descomptat, aquests dos sistemes no abasten la globalitat de tots els processos cognitius de la nostra ment (llegiu-hi ment/cervell), ja que n'hi ha uns quants més en acció (Smith i Kosslyn, 2007).

Tot i que hi ha consens sobre aquest paradigma no tothom anomena els dos sistemes amb els mateixos termes.<sup>5</sup> Aquí adoptaré la nomenclatura més acadèmica segons la qual se'ls anomena **sistema I** i **sistema II**.

No és sobrer comentar que una determinada formulació teòrica esdevé paradigmàtica quan se'n deriven investigacions prolífiques i fecundes (Kuhn, 1966). Una petita

i emblemàtica prova de la fertilitat del paradigma dels dos sistemes cognitius és que ha reformulat dos conceptes molt antics i tradicionals com són la **intuïció** i la **raó**. A la primera, per ser més primitiva des del punt de vista evolutiu, se la considera integrada en el sistema I, i la segona, en el sistema II. Són dos conceptes que molt sovint s'han presentat com a antagònics i que tradicionalment han estat clau en diverses teories epistemològiques sobre la creació del coneixement científic. Aquest petit comentari dona una idea de per on va cada sistema.

Tampoc és sobrer avançar que una de part de la recerca cognitiva té per objecte identificar els errors que es produeixen de manera inconscient i automàtica. Són els anomenats **biaixos cognitius**, alguns dels quals tractaré en detall en un altre capítol, ja que són força comuns dins l'aula i tenen un paper clau en l'aprenentatge per assaig i error. Som éssers fal·libles, per això sabem aprendre d'aquesta manera.

Si compremem les causes dels errors, podrem actuar-hi didàcticament, i no per evitar-los, sinó per ensenyar a usar-los com un instrument preciós per generar coneixement. És ben cert que dels errors se n'aprèn, però la qüestió és com, és a dir, **com passar de l'error al coneixement**, que és crucial per facilitar a l'alumnat una construcció cognitiva del coneixement. De fet, l'aula és una mena de factoria d'alambinar errors per destil·lar-ne coneixements. D'errors no ens en faltaran, són la matèria primera del coneixement.

Però abans d'entrar en aquestes qüestions cal precisar les característiques dels dos sistemes cognitius i les seves diferències, la seva dinàmica i com interactuen entre ells produint el meravellós fenomen de la cognició objectiva. I sense perdre la perspectiva didàctica, el coneixement d'aquests dos sistemes han de ser-nos útils per guiar, comprendre i facilitar els aprenentatges. Identificar-los en cadascuna de les produccions de l'alumnat és la base de l'empatia cognitiva.

## Les tres ments del geni

El filòsof René Descartes (1596-1650) va recórrer a una entelèquia imaginària per advertir-nos de la nostra fal·libilitat. L'anomenà el geni maligne,<sup>6</sup> la funció del qual és estar sempre amatent per identificar els errors que la nostra pròpia ment ens presenta com a veritats. Descartes malfiava de la intuïció, de manera que no va ser una pedra angular en l'arquitectura de la seva filosofia.

El geni maligne cartesà és la personificació del dubte metòdic, de la **racionalitat**, sens dubte una de les grans fites de la història del pensament. El racionalisme tradicional ha mirat la intuïció amb mals ulls perquè la seva mirada era endocèntrica i no la considerava tan fiable com la deducció lògica.

Però el paper de la intuïció en la filosofia de la ciència també ha tingut els seus defensors al llarg de la història del pensament, com el matemàtic, físic i també filòsof Henri Poincaré (1854-1912). Paga la pena llegir la brillant defensa que fa sobre el paper de la intuïció en el seus descobriments matemàtics (Poincaré, 1908).

La intuïció, una facultat intel·lectual que sempre ha estat sinònim de clarividència, de sagacitat, de perspicàcia, d'inspiració i creativitat, és, potser, la característica més distintiva i emblemàtica del sistema cognitiu anomenat «inconscient cognitiu o ment autònoma», o simplement sistema I.

La racionalitat, que és l'altra facultat intel·lectual en joc, té molt a veure amb la reflexió, la projecció i la planificació, i també amb la metodologia, la lògica de

l'argumentació, l'avaluació, la intel·ligència executiva i l'algorísmia en general. Són les activitats de la nostra ment racional que formen el sistema cognitiu II, conegut també com el «conscient cognitiu».

Com que em fascina la capacitat cognitiva humana, sobretot la de la infància, i si se'm permet adoptar una llicència literària, no puc deixar de veure els nois i les noies que corren per les aules com a genis cognitius (Vogel, 1988), fal·libles, sí, però genials. I no és una visió idealista i mancada de sentit de la realitat, com es pot pensar. La qualificació de geni no la dono exclusivament als alumnes anomenats d'altres capacitats. Si es practiquen sovint les pluges d'idees, la realitat és que també brillen molts alumnes que no reben aquesta qualificació. Habiten molts genis en les llànties cognitives que brillen a les aules.

Bàsicament en distingirem dues. Una, la llàntia cartesiana, l'atorgarem al geni racional, i l'altra, la llàntia de la inspiració, al geni intuïtiu. Ambdós genis coexisteixen i interactuen en les nostres ments, de manera que, de moment, són dues les flames que il·luminen el procés cognitiu.

Potser crida l'atenció l'expressió «inconscient cognitiu». En el meu cas, acostumat com estava a entendre la cognició, i, per tant, també l'aprenentatge, com un acte explícit, voluntari i conscient, és a dir, exclusivament racional, també em va xocar quan la vaig llegir per primera vegada. Em va sorprendre que s'atribuís al nostre inconscient una facultat tradicionalment reservada a la consciència. Per a mi, aleshores, l'inconscient era un domini ocult de la personalitat amb ressos freudians per on deambulaven caòticament les emocions i els desitjos, però incapaç d'aprendre i de generar coneixement. Era presoner de l'històric prejudici racionalista, que atorga al pensament lògic un paper predominant en la producció de coneixements i deixa fora la intuïció. Més d'un neurocientífic (Piattelli, 1993), considera l'inconscient –emocional i cognitiu simultàniament– com un dels descobriments més importants del segle xx.

Una característica de l'inconscient cognitiu rau en el fet de ser una caixa fosca de la memòria profunda. No pot ser d'una altra manera; seria una paradoxa que fóssim testimonis conscients i directes de com l'inconscient cuina les intuïcions. És una evidència corroborada per tothom. No sabem com, però les intuïcions i les idees ens apareixen a la consciència talment com un plat elaborat i sense cap mena d'esforç cognitiu. Prohibit entrar a la cuina.

És ben cert que quan ens concentrem de manera conscient i voluntària en un problema que sigui significatiu per a nosaltres ens afloren a la ment possibles solucions, però no sempre són les més creatives o innovadores. Tothom que hagi persistit a trobar solucions a un problema al llarg del temps té l'experiència que se li han acudit solucions en moments inesperats, i sense una raó aparent o una causa desencadenant. I si s'hi insisteix prou, fins i tot d'una manera obsessiva, s'hi arriba a somiar i sovint l'endemà un s'aixeca amb una solució al cap, que provarà i avaluarà de manera conscient.

En paral·lel, i simultàniament a tot això que s'acaba d'exposar, brilla la llàntia del desconfiat sistema II, alimentada per la raó i la reflexió, que il·lumina els processos cognitius conscients, els que proporcionen una seguretat cognitiva fonamentada en l'argumentació lògica ben amanida pel rigor analític i l'algorísmic. Res de córrer, res de precipitar-se cap a unes conclusions sense contrastar. Creativitat? Invenció? Demostrea-la! Cal esforç cognitiu, la lentitud mental de l'execució algorísmica, de la comprovació i l'avaluació sistemàtica com a garantia preventiva de depuració d'errors. Som

genis fal·libles, per això som cautelosos i prudents amb les conclusions, la veritat i la certesa per damunt de tot.

El quadre sinòptic següent (Keith, 2010) resumeix les característiques principals de cada sistema, alguna de les quals desplegaré en propers apartats.

	Sistema I (geni intuïtiu)	Sistema II (geni racional)
Processos	Ràpids Automàtics Inconscients o preconscients De baix esforç i alta capacitat Heurístics Associatius	Lents Controlats Conscients D'esforç alt i baixa capacitat Analítics Basats en regles
Actituds	Implícites Estereotips culturals Lentes per canviar Accés ràpid	Expícites Creences personals Ràpides per canviar Accés lent
Continguts	Reals Concrets Contextualitzats Dominis específics	Hipotètics Abstractes Descontextualitzats Dominis generals
Arquitectura	Un conjunt de sistemes modulars En paral·lel No utilitza memòria de treball	Un sol sistema En sèrie Utilitza memòria de treball
Evolució	D'evolució antiga Compartit amb animals No verbal Serveix a objectius genètics	D'evolució recent Únic dels éssers humans Llenguatge amb implicació Serveix a objectius individuals

Gairebé tot allò que d'alguna manera processa i aprèn el sistema II acaba dipositant-se i amalgamant-se en les fosques pregoneses de la memòria profunda del sistema I, i associant-se ves a saber amb què. Així, quan una intuïció llamega en el conscient cognitiu, a més de provocar una reacció emocional, arrossega rere seu tot un enxarxat de coneixements que se li han associat en el gresol de l'inconscient cognitiu.

Aquests coneixements secundaris que afloren en els marges d'una intuïció són una font de creativitat molt important, com molt bé assenyalen els que practiquen les tècniques de l'anomenat pensament lateral (Bono, 1969; 1970). La nostra capacitat associativa impressiona per la seva rapidesa i per una connectivitat sorprenent, que es produeix amb poc o gens esforç cognitiu.

Per una altra banda, cadascun dels dos sistemes aprèn, però a la seva manera. Per això la psicologia cognitiva actual distingeix entre aprenentatges conscients o explícits i aprenentatges inconscients o implícits (Tubau, 2005).

Centrant-nos en el sistema II, encara es pot afinar una mica més quant a la composició de la seva estructura (Stanovich, 2011). S'hi distingeixen dos subsistemes amb funcions específiques:

- La ment reflexiva, un dels dominis de la consciència, del jo que pensa i governa tot allò que fa, del jo que construeix explicacions sobre els esdeveniments del món exterior. És també el jo que concep projectes, que els planifica i els avalua, que s'anticipa a les contingències i entoma els problemes que sorgeixen.
- La ment algorísmica, seu de la intel·ligència executiva, dotada amb un ampli repertori de procediments algorísmics, els uns apresos de manera implícita o inconscient i els altres de manera explícita o conscient.

La distinció d'aquests dos subsistemes és tota una novetat respecte a la psicologia cognitiva tradicional, ja que estableix una frontera entre el jo que pensa i el jo que executa algorismes.

Una conseqüència d'aquesta diferenciació afecta de ple el concepte omnímode tradicional d'intel·ligència que abastava totes les funcions cognitives anomenades superiors sense cap mena de distinció entre elles; el concepte d'intel·ligència es referia a tota mena de raonaments, a la creativitat, a la intuïció al llenguatge a l'algorísmia, etc. Però, amb aquesta diferenciació, ara queda circumscrita a un context operatiu, fonamentalment executor dels objectius i dels plans que ordeix la ment reflexiva, de la mena que siguin. I aquí també hi hem de situar el concepte popular d'intel·ligències múltiples.

Tal com ho veig, aquesta distinció també posa ordre en la rica sinonímia del mot **raó** i dels seus derivats com **raonar** i **racionalitat**. Els raonaments són seqüències de proposicions que s'encadenen per tal de justificar o demostrar alguna cosa, són operacions lògiques que, com a tals, són algorismes, de manera que són executats per la ment algorísmica, sigui quina sigui la seva modalitat lògica. Evidentment, un raonament pot formar part d'un projecte o d'una explicació, però d'una part no se'n pot derivar o extreure el tot, per gestionar un tot cal una facultat diferent de la de raonar, capaç de globalitzar i integrar les parts (els raonaments) en un conjunt. D'això se'n pot dir pensar de manera racional, així que la seu de la racionalitat és la ment reflexiva, no l'executiva.

En resum, el geni té tres ments: la reflexiva o racional, l'algorísmica o executiva i l'autònoma. El model de la figura 2.2 (Stanovich, 2011) dels dos sistemes cognitius i de les tres ments serà particularment rellevant al llarg de tot l'assaig ja que és un dels dos marcs teòrics de referència. L'altre serà el model d'aprenentatge per assaig i error.

Bàsicament, aquest model ens aproxima a la comprensió de com pot ser el procés cognitiu d'una ment en acció, de manera que esdevé un bon model per fonamentar i facilitar una actitud empàtica i cognitiva amb l'alumnat.

L'esquema també es pot entendre com un instrument d'observació per interpretar la gestió cognitiva dels aprenentatges i entendre les causes dels errors. Estirant la metàfora de l'iceberg, el model ve a ser l'equipament amb què explorem la part submergida, és a dir, l'interior del cervell dels nostres alumnes, per bé que és un equipament força precari.

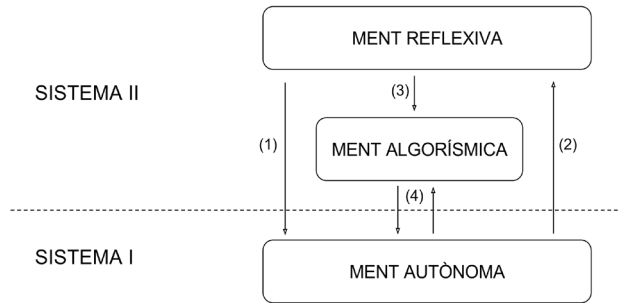


Figura 2.2

Abans de detallar la descripció de cadascuna de les ments, completo el model amb uns breus apunts sobre les quatre interaccions que estan anotades en l'esquema de la figura 2.2:

- En primer lloc, la gestió cognitiva de la resolució d'un problema (llegiu-hi també aprenentatge per assaig i error) correspon a la ment reflexiva o ment racional, és a dir, al jo conscient. Quan entomem un problema, aquesta ment és la que defineix i estableix els objectius per a l'acció cognitiva que desenvoluparà, per tant, actua d'una manera finalista. Aleshores, d'alguna manera fa una crida, interpel·la o interroga (1) la ment autònoma, i aquesta respon (2) generant heurístiques o estratègies de solució.
- Assumida una heurística concreta, la ment racional selecciona i activa algorismes que coneix, i els executa (3) per tal d'arribar a la solució. En part, aquests algorismes contenen components automatitzats per altres algorismes més primitius que s'executen de manera automàtica (4).
- Quan s'arriba a una solució, la que sigui, una ment racional ben educada l'avaluarà, o simplement la donarà per bona. Si durant el procés de resolució s'evidencien errors de tipus eruptiu, aleshores, el jo racional en pren consciència i pot, o no, dedicar-se a solucionar-los, la qual cosa implica un nou problema a resoldre. I si l'error es diagnosticat mitjançant una avaluació conscient també implica l'emergència d'un nou problema a resoldre.

Els apartats que hi ha a continuació detallen amb més precisió cadascuna de les tres ments, però en tot moment cal tenir present la interdependència interactiva entre elles que s'acaba d'exposar, ja que, si no, es pot tenir la impressió que el model és incomplet.

Hi insisteixo una vegada més: aquest model no és una fotografia precisa i completa del conjunt dels processos cognitius, només és una simplificació que pretén ser pràctica i manejable per tal de facilitar l'empatia cognitiva amb l'alumnat. Per exemple, no s'hi inclouen les interaccions entre els processos cognitius i els emocionals, de les quals parlaré més endavant.

## Les habilitats del geni intuïtiu

A més de les característiques més generals del sistema I ja esmentades, la llista següent (Kahneman, 2011) en concreta més el camp d'acció intel·lectual i la manera de fer i actuar en el pla cognitiu.

- Genera impressions, sensacions i inclinacions que, si aprova el sistema II, es converteixen en creences, actituds i intencions.
- Opera de manera ràpida i automàtica, amb poc o cap esforç, i cap sensació de control voluntari.
- A requeriment del sistema II, mobilitza l'atenció quan detecta un fet particular.
- Crea una estructura coherent d'idees activades en la memòria associativa.
- Associa una sensació de facilitat cognitiva a il·lusions de veritat, sensacions plaents i vigilància reduïda.
- Distingeix el que és sorprenent del que és normal.
- S'infereix i inventa causes i intencions.
- Ignora l'ambigüitat i elimina el dubte.
- S'inclina sempre a creure i confirmar.
- Se centra en l'evidència existent i ignora l'evidència absent.
- Genera un conjunt limitat d'avaluacions bàsiques.
- Estableix equivalències entre escales d'intensitats (per exemple, entre grandària i volum sonor).
- En ocasions substitueix una pregunta difícil per una altra més fàcil.

Per últim, i molt rellevant des d'una perspectiva didàctica, quan el sistema I és requerit o interpellat per resoldre un problema, genera **heurístiques resolutòries**, és a dir, estratègies per resoldre'l. Aprofundim el concepte abans de continuar amb les dues ments del sistema II.

## Heurístiques

El mot **heurística** deriva del grec *eureka* i significa 'ho he trobat'. La llegenda posa l'exclamació *eureka* en boca d'Arquimedes quan va descobrir el principi de la flotació.

En els àmbits de la ciència i de la tecnologia es qualifica d'heurístic a qualsevol procés de resolució d'un problema mitjançant mètodes no rigorosos, és a dir, quan se cerca la solució per tempteig, per procediments empírics o simplement per intuïció, és a dir, sense usar procediments inductius o deductius. Així, en informàtica una heurística és un algorisme que normalment troba bones solucions, encara que hi hagi constància que pugui ser erroni en alguns casos.

En el camp de la didàctica de la matemàtica, l'ensenyament de la metodologia heurística va originar un corrent pedagògic, vigent actualment, anomenat aprenentatge basat en problemes (ABP), del qual George Pólya (1887-1985) en fou pioner. El seu llibre *How to solve it* s'ha convertit en una obra de culte.

En psicologia cognitiva, el terme es refereix a les propostes d'acció que la nostra ment ens presenta de manera espontània, automàtica i ràpida quan se'ns demana actuar, emetre un judici o prendre una decisió. Les heurístiques pertanyen a la constel·lació de les intuïcions i de les conjetures, i són el resultat de processos cognitius que

tenen lloc en les profunditats de l'inconscient cognitiu i que, literalment, **llampeguen** en l'espai de la nostra consciència. Responen a les expressions quotidianes «tinc una idea, se m'acudeix que, etc.».

Les tres característiques bàsiques i generals de les heurístiques (Gigerenzer, 2007; Kahneman, 2011) són les següents:

- Són **ràpides i frugals**, i solen operar igual de bé que els algorismes racionals. Ràpides, perquè ens **apareixen a la ment de cop**. I frugals, perquè necessiten de poca informació per activar-se.
- No són el resultat d'un **esforç mental**, és a dir, que brollen espontàniament de les profunditats de la ment, i és per això que s'associen amb la intuïció.
- Són **autònomes**, és a dir, que no les produïm d'una manera voluntària (com fem, per exemple, quan executem un càlcul que no hem automatitzat), en som conscients una vegada han emergit del fons de la nostra ment.

Tenim una predisposició natural a seguir les nostres heurístiques, a fer-ne cas i hi basem bona part dels nostres judicis i decisions; per això també són una font important d'errors (Kahneman, 2011). En aquest sentit, en parlaré a bastament en el proper capítol.

Des de la perspectiva pedagògica hi ha dues característiques més que cal tenir en compte. Per una banda, les heurístiques (H) sovint es presenten com a regles, instruccions o pautes per a una acció (A) posterior, i com que emocionalment estem predisposats a executar-les, se'n deriva el fet que les heurístiques, una vegada ens han llampegat al conscient, ens empenyen emocionalment cap a l'acció, de manera que mobilitzen la ment algorísmica ( $H \rightarrow A$ ). Per una altra banda, de les heurístiques errònies se'n pot extreure coneixement, la qual cosa, tant des d'un punt de vista pedagògic com epistemològic, els afegeix molt més valor.

Com es concreta una heurística? És a dir, si es generen a la ment autònoma, hi ha manera de descriure-les? Són preguntes rellevants des del punt de vista didàctic, ja que si en depèn la resolució de problemes, i, per tant, l'aprenentatge per assaig i error, bé les haurem de conèixer a fi de manejar-les, de facilitar-les i de conscienciar els nois i les noies del seu valor. Vegem-ne un exemple.

#### Heurística de la mirada

El gràfic de la figura 2.3 ens la il·lustra.<sup>7</sup> La utilitza un jugador de beisbol que corre per agafar una bola que descendeix (Gigerenzer, 2007). Pot expressar-se amb aquestes instruccions:

*Fixa la mirada a la bola, comença a córrer i ajusta la velocitat de manera que l'angle de la mirada es mantingui constant.*

Si un s'imagina la quantitat de variables físiques que intervenen en la trajectòria parabòlica de la bola i els càlculs que caldria fer per tal que un robot arribi just a temps al lloc concret on caurà la bola, i els compara amb la facilitat amb què els humans agafem la bola, s'ha d'admetre que som capaços de fer sense esforç cognitiu una cosa semblant a tots aquests càlculs, i ho fem d'una manera ràpida i autònoma, és a dir, sense una intervenció directa de la consciència.



La producció d'heurístiques és inherent a qualsevol activitat finalista (agafar la bola), i necessàriament activarà o mobilitzarà determinades accions (córrer, fixar la mirada, etc.) que poden ser caracteritzades com a algorismes psicomotors.

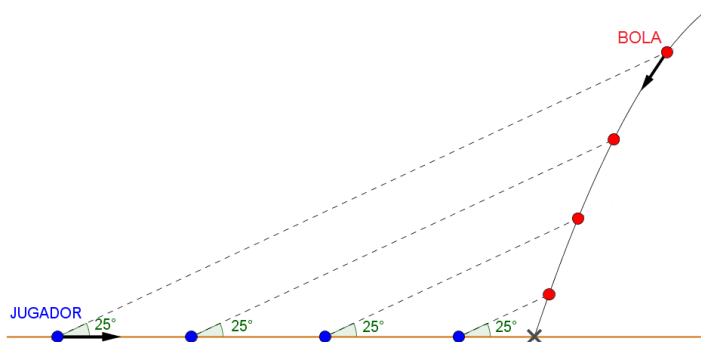


Figura 2.3

És obvi que noies i nois són ben capaços d'entomar boles, i de practicar l'heurística de la mirada de manera espontània, com molt bé sap el professorat d'educació física (Latinjak, 2013). Usant la mateixa facultat, també generaran tota mena d'heurístiques quan entomen un problema de ciència, tecnologia i matemàtiques.

Quedem-nos, de moment, amb la idea que les heurístiques engeguen els assajos o les temptatives per resoldre un problema i que mobilitzen accions algorísmiques –ja veurem de quina manera. El coneixement de les heurístiques que intervenen en els aprenentatges escolars és tot un repte per a la recerca didàctica; els dedicaré el proper capítol.

## Les habilitats del geni executiu

Els dominis del geni executiu són els de l'algorísmia, un terme que està de moda avui en dia i que va aparellat al d'intel·ligència artificial. En el territori escolar els algorismes són molt abundants perquè tenen una presència preponderant en els currículums i, per tant, són objecte d'aprenentatge. Bona part dels coneixements i de les competències curriculars són pura algorísmia. A més, en el territori extraescolar (la resta del món) la presència i la dependència de la tecnologia algorísmica és cada dia més determinant en les nostres vides, i va en alça, de manera que no és gens estrany que el geni se n'ocupés específicament des de temps remots i que hagi desenvolupat una ment específica per manejar-los.

És pertinent esmentar l'origen històric del mot **algorisme**, perquè ens remarcarà la naturalesa del concepte. Procedeix de la llatinització del nom del matemàtic àrab conegut com al-Khwarazmí (segle IX), qui, entre altres aportacions matemàtiques, dissenyà els mètodes que usem encara avui per fer les operacions aritmètiques bàsiques, a partir del sistema de numeració decimal ideat a l'Índia. La història del concepte d'algorisme confirma que un procediment determinat esdevé algorísmic si pot expressar-se de manera formal i lògica, amb coherència i sense ambigüitats.

D'aleshores ençà ha plogut molt i l'algorísmia ha anat creixent no només en l'àmbit matemàtic, sinó sobretot en el computacional, en què la complexitat de la tecnologia algorísmica és espaterrant. És obvia la distinció entre l'expressió d'un algorisme en un llenguatge formal i la màquina que l'executa, és a dir, entre programari i maquinari.

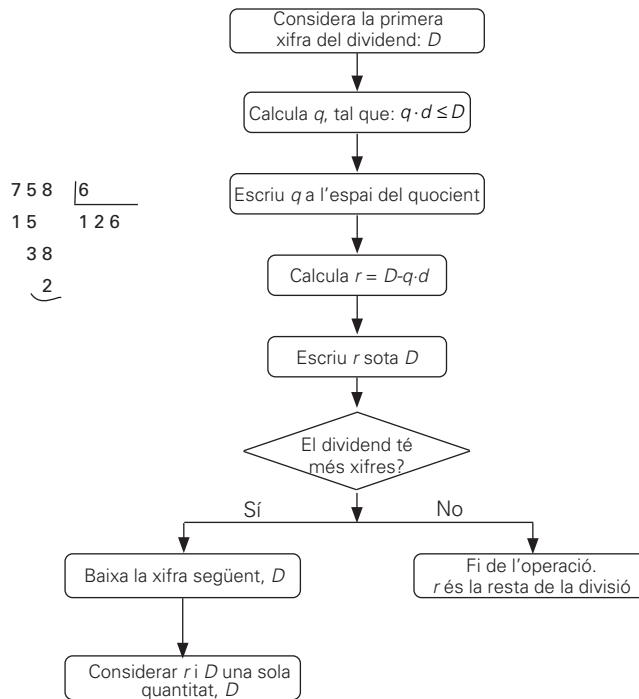


Figura 2.4

Qualsevol enginyer electrònic o informàtic entén i compren tant l'algorisme que resol l'operació com el procés computacional que fa una màquina quan l'executa. Però si observem un subjecte que fa la mateixa operació bé mentalment, bé llapis en mà, aquí no funciona cap analogia amb la situació anterior. Ningú no sap què fan exactament les xarxes neuronals de la nostra ment (llegiu-hi cervell) quan executem aquest càlcul. Amb això vull dir que, fins on jo conec, el procés cerebral que executa l'operació aritmètica més simple continua sent una caixa negra.

Afortunadament, les ciències cognitives no es limiten a esbrinar el funcionament de la ment o cervell; de fet, a través de l'observació perspicaç dels aprenentatges es poden esbrinar moltes coses dels processos cognitius implicats. Vet aquí un altre nexa entre la didàctica i la psicologia cognitiva.

Repassem en primer lloc el concepte més genèric d'algorisme: un conjunt ordenat i finit d'operacions que permet executar una tasca o trobar la solució a un problema definit prèviament. En aquest concepte, tant hi caben una operació aritmètica com el procediment per fer una truita a la francesa, per posar dos exemples distants, que no fan més que confirmar l'abast de la definició.

Coneixem els algorismes que ensenyem, evidentment, i els sabem executar amb expertesa, però siguem conscients que aquest coneixement no conté, perquè no és necessari per a l'execució, la història de la seva construcció ni tampoc els algorismes **primitius** que fan en possible l'execució.

La figura 2.4 representa la clàssica i tradicional expressió escrita de l'algorisme de la divisió que executen una ment, uns ulls i una mà humanes, servint-se de paper i llapis. Cadascuna de les accions d'aquest algorisme que executem de manera seqüencial mobilitzen l'execució d'uns «altres algorismes» que són subsidiaris de l'algorisme principal, els quals no tenen una presència tan visible i evident. Tots ells són cridats i executats, alguns de manera explícita i conscient i uns altres de manera implícita o inconscient.

Tenim, en un primer nivell de profunditat, l'algorisme de la multiplicació per temps que troba els quocients parcials; el de la resta, que troba els dividends parcials; el de la suma, quan es «baixa» una xifra i forma una sola quantitat amb la resta del dividend parcial; i impregnant i presidint tot el conjunt, el sistema de numeració decimal, que, a la vegada, està format pels algorismes que organitzen i codifiquen una quantitat.

En paral·lel, i formant part d'aquest primer nivell de profunditat, tenim la categoria dels algorismes «organitzadors» derivats de la conceptualització de l'espai comptable, sense els quals no seria possible guiar el llapis per fer les anotacions del càlcul en el lloc adequat, és a dir, s'assignen llocs per al dividend, per al divisor, per al quocient i per a cadascuna de les operacions parcials que es van fent, d'entre les quals s'ometen, per mor de l'economia d'esforços, els zeros que no tenen valor quantitatiu, etc.

I en la mesura que incrementem el nivell de profunditat d'aquests algorismes i els descomponem en d'altres més primitius, comença a aflorar la complexitat psicomotora que mobilitza i controla la ment executiva. Només la mà que escriu cadascuna de les xifres ja és una meravella de precisió executiva (Wilson, 1998).

En resum, una perspectiva didàctica sobre l'aprenentatge d'algorismes és més eficient en la mesura que indaga en les arrels de l'algorisme que ensenya. És obvi, així ens ho diu el sentit comú i l'experiència docent, que un algorisme s'aprèn malament quan fallen alguns d'aquests algorismes primitius. Posem-hi, doncs, tota l'atenció.

A diferència de l'univers de les heurístiques, poc conegut en els entorns educatius, l'univers dels algorismes és omnipresent (Landa, 1972; 1978). Un últim apunt: com que un algorisme s'originà per resoldre un problema, en didàctica és ineludible plantejar el problema, si no, en restar-li el context i la causa que l'explica, en minvarà la significació, i això no és una bona notícia per a un aprenentatge. En tant que són solucions a problemes, el binomi **heurística–algorisme**, que ja he comentat, pren més força i relativitza l'excessiva importància que l'estatu quo educatiu atorga als aprenentatges algorísmics.

## Les habilitats del geni racional

L'any 1980, un equip de mestres de l'IREM<sup>8</sup> de Grenoble sorprenué l'activa comunitat francesa de l'ensenyament de les matemàtiques amb un article publicat al seu butlletí. Dissortadament, no he pogut referenciar-ne l'autoria, ja que l'article no està signat. No obstant això, el problema que van plantejar als nens de primer i segon cicle de primària va despertar una allau de comentaris i estimulà força publicacions i estudis (Baruk, 1985). Vet aquí l'enunciat del problema:

Un vaixell porta 26 ovelles i 10 cabres. Quina és l'edat del capità?

En les dades que aportava l'article, aproximadament un 75% de nens del cicle inicial van calcular l'edat del capità sumant 26 i 10; i al cicle mitjà, un 25%. L'article es pregunta per què un percentatge significatiu de nens donen sentit a un enunciat que no en té.

Des de la perspectiva de la psicologia cognitiva, aquestes respostes s'atribueixen a un biaix cognitiu conegut com el biaix de la substitució per simplificació, que exposaré en el capítol dedicat a l'exploració d'errors freqüents en els aprenentatges escolars.

Això significa que en aquestes edats encara no es té formada la capacitat de comprendre i d'avaluar el sentit de proposicions d'aquesta complexitat? No, en absolut. La prova està en què a nivell verbal pots mantenir converses molt racionals amb els nens perquè tenen prou capacitat per detectar errors de moltes menes.

El que palesen aquestes errors, i ho veurem amb més detall quan hi aprofundim, és que l'avaluació de les pròpies produccions intel·lectuals és un aprenentatge llarg i lent. Ho acredita la disminució progressiva d'aquest error a mesura que augmenta l'edat. Tot un indicador de l'aprenentatge de la racionalitat.

En l'esquema sobre les tres ments (reflexiva, algorísmica i autònoma) (vegeu la figura 2.2) ja he dit que la reflexiva, que he rebatejat com la ment racional, és un dels dominis de la consciència i que se centra en tres àmbits particularment rellevants pel que fa als aprenentatges tecnocientífics:

- La concepció de projectes i de plans per executar-los.
- La construcció de coneixement.
- El control cognitiu i l'avaluació de les accions pròpies i alienes.

Respecte al control cognitiu o l'avaluació, en faig només un apunt. Més endavant hi aprofundiré, com també en la concepció i l'execució de projectes i en la construcció de coneixements.

Considerem que qualsevol activitat cognitiva que fem de manera espontània integra alguna mena de sistema d'avaluació, i la justificació fonamental d'aquest fet rau en què les nostres accions sempre tenen alguna finalitat, explícita o implícita. L'avaluació és una capacitat de la nostra ment reflexiva, el domini de la qual és determinant per gestionar les emocions que s'esdevenen necessàriament durant el procés d'aprenentatge.

Situats en el context escolar, afavorir que noies i nois s'empoderin d'aquesta capacitat natural d'avaluació i de gestionar les seves emocions, sobretot davant el fracàs cognitiu i de les reaccions emocionals que se'n deriven, és un objectiu pedagògic molt més que raonable. Imprescindible, diria. No els afavoreix gens no ser els protagonistes i responsables de l'avaluació dels seus aprenentatges.

## La memòria associativa del geni

L'objectiu d'aquest assaig no és esplanar-se sobre la memòria. Tan sols em centraré en una característica, atesa la seva rellevància en l'enfocament didàctic que defenso aquí.

Quan s'aborda el tema de la memòria (la humana), cal fugir del prejudici de comparar-la amb una mena de repositori que té el nostre cervell per guardar-hi els coneixements apresos. La simple idea d'emmagatzemar suggereix prestatgeries, compartiments, ordre i classificació. La memòria biològica no s'assembla a les digitals, ni

en els suports materials ni en les dinàmiques funcionals, malgrat els espectaculars avenços de la intel·ligència artificial que imita el funcionament de les xarxes neuronals dels nostres cervells. Per contra, si hi ha una expressió que resumeixi la concepció contemporània de la memòria és que «som memòria viva», que equival a dir que la funció primordial de la nostra memòria és construir contínuament el nostre «jo», cosa que fa constantment, tot representant i interpretant amb coherència la realitat que ens envolta a partir del seu bagatge. Per dir-ho d'una manera metafòrica, la nostra memòria no es limita a guardar les pintures i les imatges de la realitat, sinó que pinta quadres contínuament.

No és objecte d'aquest assaig especular amb les diverses classes de memòries amb què operem les persones, n'hi ha prou a considerar-la una entitat dinàmica que treballa amb idees. Una idea és la representació mental d'una cosa real o imaginària, un concepte elemental o una noció general. Les idees necessiten d'una concreció lingüística, més clara o més ambigua o difusa, però sense una fonètica i una semàntica el seu cos té poca presència. La psicologia cognitiva actual concep les idees com els nusos d'una extensa xarxa neuronal que es coneix com la **memòria associativa**, on cada idea està vinculada a moltes més. I quan treballa molt ben greixada, té un paper decisiu en la creativitat.

Una idea pot ser concreta o abstracta, i, sigui com sigui que ho fa el nostre cervell, pot representar-la o imaginar-la, que és el mateix. Sembla ser que les idees no tenen gaires possibilitats de sobreviure fora de la xarxa de la memòria associativa. La ment té la capacitat d'activar constantment idees de la memòria associativa. Que una idea s'activi significa que passa d'un estat de latència a un d'excitat, és a dir, disponible per deixar la seva empremta en aquest llenç on el nostre pensament pinta contínuament. La pròpia sintaxi del llenguatge, amb la seva gran varietat de nexes de coordinació o de subordinació entre oracions, és una mostra de l'enorme capacitat associativa de la ment.

L'activació d'idees que més ens interessa per al nostre propòsit didàctic és la que es produeix a requeriment de la ment racional o algorísmica, que s'esdevé quan afrontem un problema en un entorn d'aprenentatge. Una idea que ha estat activada no només n'evoca una altra, sinó que n'activa moltes més, que al seu torn n'activen unes altres, i així successivament. La màquina associativa no descansa mai, perquè som una memòria viva. Sembla ser que només algunes de les idees activades queden registrades en la consciència; la majoria de les operacions del pensament associatiu són silencioses i ocultes al nostre jo conscient.

Això últim és un tret fonamental de la màquina associativa. La ment autònoma presenta a la consciència la millor història possible que ha construït amb les idees activades en aquell precís moment (Kahneman, 2011). Aquesta és l'arrel de la intuïció. Ara bé, per molt convincents que ens puguin semblar, les intuïcions sempre són subjectives i, per tant, fal·libles. Per descomptat que la ment racional avalua si una intuïció és versemblant, però sense la màquina associativa esdevé estèril.

Representar la memòria associativa humana com un graf complex, molt atapeït de nodes interconnectats, tal com s'acostuma a veure en les representacions de les anomenades xarxes neuronals artificials, no li fa justícia, perquè hi manca una qualitat essencial. Em refereixo, per una banda, al caos, a la confusió i a la indeterminació que experimentem, en major o menor grau, quan pensem, i, per altra banda, els llampegueigs de clarividència que s'hi produeixen puntualment, dels quals n'extraïem coneixement,

o això creiem. Posseïm i som un gresol cognitiu, no una supercomputadora. Si de cas, l'única metàfora que se m'acut per representar el gresol neuronal de la memòria associativa s'assemblaria a una mena de **núvol d'etiquetes** hiperactiu on espurneigen contínuament connexions que es propaguen seguint determinades pautes, algunes de les quals examinaré amb deteniment atesa la seva rellevància en l'aprenentatge de la resolució de problemes. En concret, em refereixo a l'analogia.

## El poder cognitiu de l'analogia

Centrem ara l'atenció sobre les associacions entre idees. Ja en el segle XVIII, el filòsof escocès David Hume, a **Investigació sobre l'enteniment humà** exposava les tres classes d'associacions d'idees que, segons ell, la nostra ment produeix: la semblança, la contigüitat en el temps i en l'espai, i la causalitat.

Aturem-nos en el vincle de semblança entre idees, ja que tradicionalment se'l considera el nexse associatiu més poderós i fructífer i, des de la perspectiva constructivista, l'eina epistemològica per excel·lència.

Com mostraré tot seguit, les connexions entre idees o conceptes no sempre són tan perceptibles o evidents com, per exemple, la semblança entre figures geomètriques, és a dir, les figures que tenen formes idèntiques però grandària diferent. De fet, les connexions més creatives acostumen a no tenir una visibilitat immediata o una semblança perceptible. El connector pot ser qualsevol característica o propietat que comparteixen dues o més entitats qualssevol, però amb una derivada epistemològica que pot arribar a ser molt rellevant.

Tot això obliga a precisar el concepte d'analogia de la manera següent:

- Sigui A una entitat definida per les propietats  $a_1, a_2, a_3...$
- Sigui B una entitat definida per les propietats  $b_1, b_2, b_3...$
- Sigui C...
- Diem que A, B, C... són anàlogues si comparteixen almenys una propietat.

Tal definició també propicia una gran obertura de les cadenes associatives entre les idees que bullen per la ment autònoma, ja que una sola propietat és suficient per connectar dues o més entitats. Certament, aquestes connexions ens les hem d'imaginar molt obertes, líquides i d'una semàntica no sempre precisa. Per força, la visió que en puguem tenir, que pot associar idees, ha de reflectir la intricada i viva xarxa neuronal.

Alguns ítems del test d'associació remota (Mednick, 1968) ens mostraran que precisar els nexes que fan possible una associació d'idees no sempre és una tasca fàcil:

Llegiu els tríos de paraules següents i penseu una quarta paraula que s'hi pugui associar:<sup>9</sup>

- Caseta, Suïssa, Pastís, .....
- Llançament, Llum, Míssil, .....
- Sal, Profund, Escuma, .....

L'ús d'analogies és molt freqüent en la descripció, en l'explicació i en l'argumentació en tota mena de contextos. La potència epistemològica de l'analogia es fonamenta en el fet que si dos objectes –un de conegut i un altre de desconegut– presenten alguna mena d'analogia podrem avançar en el coneixement del que és desconegut aplicant-li els raonaments o els mètodes que ens han servit per conèixer el primer, de manera que esdevé un element heurístic fonamental molt útil per elaborar conjectures i raonaments. També es troben en la base dels raonaments inductius (Copi i Cohen, 1978). En el pròxim capítol aprofundirem el paper que tenen les analogies en la producció d'heurístiques.

Una altra de les funcions epistemològiques de les analogies és que fan possible la construcció de categories amb què opera la nostra ment (Hofstadter i Sander, 2013). Per una altra banda, les associacions analògiques poden encadenar-se de manera intrincada i propiciar descobriments o creacions artístiques i tecnològiques rellevants.

La perspectiva didàctica que s'albira a cavall de la potència creativa de l'analogia, pel que fa a l'objecte d'aquest assaig, l'apreciarem millor amb un parell d'exemples. El primer el manllevo del camp literari: les metàfores. Una metàfora estableix una relació sorprenent entre paraules i, en fer-ho, en descobreix atributs inèdits, de manera que genera coneixement. Vegem-ne una:

### Cabell d'àngel

Desconec en quin moment històric es va popularitzar la metàfora de la confitura de carbassa, qui la creà i com es feu viral i sedimentà en la memòria col·lectiva. Sense entrar en l'estructura d'aquesta figura retòrica, podem llistar les paraules associades als quatre conceptes en joc i identificar les que s'encadenen per *obrir la via cognitiva* que va des de confitura de carbassa a cabell d'àngel.

Carbassa: planta, fruit, polpa, filament, *pèls*, nit de difunts, mercat, sopa....

Confitura: sucre, esmorzar, pastís, fruita, *dolç*, pot...

Cabell: *pèls*, filament, cap, llis, rínxol, pentinat, perruqueria, barber...

Àngel: cel, déu, *dolçor*, bondat, església, dimoni...

La via cognitiva seria semblant a aquesta: carbassa → pèls → confitura → dolç → confitura de carbassa → pèls dolços → dolçor → àngel → pèls dels àngels → cabell d'àngel.

Si ens situem en la ment de la persona que la va crear, la possibilitat que se li acudís simplement, és a dir, que fos un acte de serendipitat,<sup>10</sup> és plausible però també ho és que l'autor cerqués intencionadament un nom amb més personalitat que la pura descripció prosaica de l'origen de la confitura. Aposto que tal creació s'esdevindria en algun convent o monestir, per allò que també s'hi fa **pa d'àngel**. Tal vegada a Mallorca, per allò de les ensaïmades?

El llenguatge natural ens ofereix molts més exemples de creació de coneixement. Abans d'abandonar l'instructiu i ric camp de les metàfores, l'endevinalla següent també mostra la potència de les associacions analògiques:

En què s'assemblen una vaca i un triangle?<sup>11</sup>

Per establir una connexió entre dues entitats n'hi ha prou, doncs, a compartir una propietat. És de suposar que en el moment en què s'estableixen les connexions les entitats s'activen. El cas és que una vegada establerta una via cognitiva, està llesta perquè s'hi transiti i esdevé una nova entitat de la memòria. D'això, els neurocientífics en diuen un circuit neuronal.

De fet, quan una associació analògica reïx i crea un coneixement significatiu, l'heurística és encertada. Més endavant analitzaré com funcionen les **heurístiques de l'analogia**, que obren noves vies cognitives connectant i associant entitats que el subjecte no tenia presents. Per tant, el seu paper en l'aprenentatge és inqüestionable.

D'aquí la necessitat didàctica d'identificar si l'analogia opera en cada coneixement curricular. En trobem moltes que són evidents. En el camp de les matemàtiques, per exemple, són analogies clares les fraccions equivalents, les figures semblants, les proporcions, etc. Però n'hi ha d'altres que no ho són tan, per exemple:

### El principi d'acció i reacció

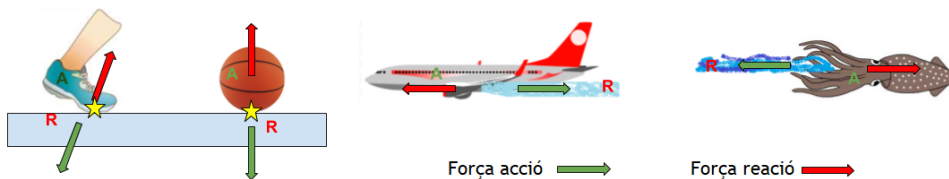


Figura 2.5

L'anàlisi de casos que verifiquen aquest principi és un bon exemple de com treballa l'analogia en la construcció del concepte d'acció i reacció. Per una banda, els objectes en què s'estableixen les analogies són ben diferents quant al seu aspecte físic. Per altra banda, en la mesura que en cada cas s'identifica la força d'acció que l'objecte actiu (A) comunica a l'objecte reactiu (R) i la força de reacció que aquest comunica a l'objecte actiu, el concepte d'acció i reacció es va construint i afermant. Evidentment, la didàctica d'aquest concepte no es limita a presentar sempre casos en positiu, calen casos negatius per contrastar.

Aquest exemple també il·lustra el paper imprescindible de l'analogia en la construcció epistemològica de les categories o conceptes fonamentals (Hofstadter i Sander, 2013). Quan, agrupem sota un sol nom un conjunt d'objectes que comparteixen una mateixa propietat, per exemple «taula», ho podem fer perquè establim una analogia entre tots i cadascun d'aquests objectes.

### El cor del geni

Seria fals i temerari afirmar que cadascuna de les tres ments es correspon amb una determinada estructura anatòmica del cervell. La ment s'entén com una propietat emergent del cervell i no com una realitat paral·lela a ell amb un *substrat mater*. Les ciències neurocognitives contemporànies entenen la ment i el cervell com una sola realitat indissociable i indestriable. De manera que, repeteixo una vegada més, la teoria de les tres ments del geni cal entendre-la com una mena d'analogia –valgui la redundància–



per acostar-se a la comprensió dels processos cognitius, un coneixement imprescindible on fonamentar l'empatia cognitiva amb els aprenentatges.

Per descomptat que el geni té moltes més capacitats que les que he apuntat fins ara. En particular, he de destacar-ne tres, perquè són determinants per al marc didàctic que plantejo en aquestes pàgines. Em refereixo al **llenguatge**, a la **imaginació** i a la **comprensió**.

Hi ha una característica fonamental del geni, però, que cal esmentar, malgrat que aquest assaig no s'hi refereix: és el binomi cognició-emoció, que les ciències neurocognitives han posat en solfa en els àmbits educatius. Que les emocions travessen i impregnen els aprenentatges escolars és una evidència coneguda des de fa molt de temps. De sempre, a l'aula estant, ho hem percebut i comprovat. D'aquí la importància didàctica de trobar maneres i mètodes per motivar els aprenentatges.

Però la neurociència ha contribuït d'una manera decisiva a consolidar un nou paradigma educatiu segons el qual només s'aprèn allò que emociona (Mora, 2013; Bueno, 2017). Ara bé, dels principis pedagògics a les pràctiques docents hi ha una certa distància que cal recórrer amb un mínim de rigor, de manera que cal fonamentar aquesta afirmació.

L'esquema de la figura 2.6 resumeix aquest principi.

Tot i que aquest esquema és aplicable a qualsevol context, centrem-nos en l'entorn d'aprenentatge amb què l'alumnat interacciona a l'aula estant. Forma part d'aquest entorn qualsevol objecte tangible o intangible (per exemple, les veus) i, per descomptat, el professorat i l'alumnat. Tot aquest conjunt de sensacions i estímuls que genera l'entorn el copsen els sentits i, tot seguit, l'analitzen sense cap mena de significat emocional les corresponents àrees sensorials i perceptives del cervell. Després passa pel filtre del sistema emocional i es allà, en el sistema límbic, on aquestes percepcions són qualificades d'alguna manera amb etiquetes emocionals (bo, dolent, atractiu, insípid, interessant, rebutjable, etc.). Aquesta informació, ja impregnada amb un significat emocional, va cap a les àrees d'associació de l'escorça cerebral per esdevenir la matèria primera dels processos cognitius.

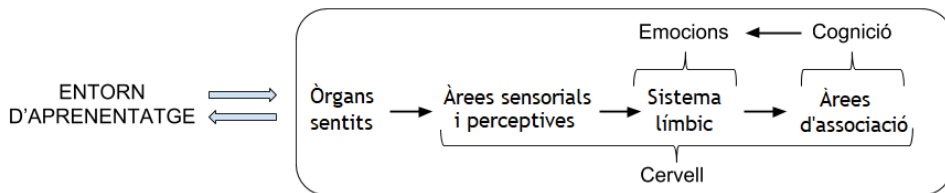


Figura 2.6

És a dir, res del que arriba a les àrees que «pensen» està desproveït d'emocions. Per dir-ho d'alguna manera, les idees amb què treballen les àrees associatives de la ment de cadascú ja estan «emocionades», i no es poden desfer de la marca encunyada pel sistema límbic. En l'àmbit subjectiu, raó i emoció formen un binomi indissociable, una moneda de dues cares.

Només quan un coneixement és objectivat i desat en un suport material (llibre, memòria, etc.) queda desproveït de la càrrega emocional subjectiva. Però quan de nou és

subjectivat per un aprenentatge, aleshores torna a emocionar-se per bé que aquesta càrrega emocional depèn del subjecte.

Però aquí no s'esgota el paradigma cognitiu-emocional. De fet, aquí comença. Tornem a l'aprenentatge basat en projectes i a la resolució de problemes. En el seu inici, la primera construcció mental del problema que fa una persona es basarà en un conjunt d'idees, però idees emocionades, que seran la matèria primera dels processos heurístics, executius i avaluadors que aquesta mobilitzarà durant la resolució del problema, del qual s'extraurà coneixement, o no. El fracàs sempre és una opció realista, i no pas la més indesitjable.

L'atenció, perquè aquí entren en joc les anomenades **emocions epistèmiques**, les quals, a l'aula estant, es perceben directament. L'èxit, és a dir, quan creiem o comprovem que hem resolt el problema o que hem comprès alguna cosa, sempre ve acompanyat per una emoció d'alegria expressada per un somriure amb les comissures dels llavis alçades i amb algunes dents exposades, les galtes aixecades i les parpelles de sota tensades (Ekman, 1972). En canvi, l'emoció que acompanya la presa de consciència d'un error és més complexa i variada. Pot anar des de la sorpresa a la tristesa passant per la ira, o combinar-les amb més o menys grau.

La gestió cognitiva i emocional dels errors és una oportunitat magnífica no només per generar coneixement sinó també per educar l'anomenada intel·ligència emocional. En els capítols que dedicaré als errors d'aprenentatge destaco la gran importància pedagògica d'aprendre a equivocar-se, la qual cosa requereix d'una didàctica específica.

## El binomi de la creativitat: heurística → imaginació

Els manuals de psicologia defineixen la imaginació com un procés cognitiu que permet a l'individu processar informació generada intrínsecament amb la finalitat de crear una representació mental interpretable per a la consciència. En termes col·loquials, a la imaginació se l'anomena **l'ull de la ment**.

Tot i que l'origen etimològic i històric del concepte **imaginació** rau en la capacitat de poder visualitzar mentalment les figures i formes de les coses que no es perceben directament, la capacitat representativa de la ment va més enllà de la típica imatge i opera sobre qualsevol contingut de la memòria com són, per exemple, sons, paraules, idees, situacions, etc.

Per a l'objectiu d'aquest assaig, cal fer valer una propietat comuna a qualsevol representació mental. Em refereixo al fet, corroborat per l'experiència personal, que tot allò que ens imaginem no és una concreció estable i permanent, sinó més aviat és líquida, és a dir, que les representacions mentals poden ser modificades, manipulades i transformades a voluntat del subjecte. És a dir, si jo soc capaç d'imaginar, posem per cas, una esfera, també puc fer canvis a voluntat sobre la seva forma, textura, color, grandària, etc. i imaginar-la transformada. És per això que a la imaginació se li atribueix l'exclusivitat de la creativitat, no obstant això, com veurem més endavant, en l'acte creatiu hi concorren més factors que la imaginació.

Una de les modalitats més freqüent i coneguda de la imaginació, que en part deriva d'aquesta propietat transformadora, és la creació de narratives i de simulacions. Aquí rau l'origen dels gèneres literaris. Sense entrar en l'àmbit oníric, en aquest escenari íntim que és la nostra ment, s'inventa éssers i contextos realistes, ficticis o fantàstics, que la voluntat del subjecte és capaç de transformar i a la vegada de participar-hi,

tot adoptant i projectant una identitat imaginària, emocions incloses. Aquesta mena d'imaginació és la que produeix els jocs simbòlics, de rol i de simulació tant en els infants, en adolescents com en els adults, i té grans implicacions emocionals. Està àmpliament acreditat i acceptat que la imaginació és un factor clau del desenvolupament cognitiu, afectiu i social. (Egan, 1992; Harris, 2000).

En la Gramàtica de la fantasia, (Rodari, 1973) s'explica l'art d'ensenyar a inventar històries a partir de dues paraules clau, anomenades el binomi fantàstic. Aquesta idea senzilla és una eina didàctica poderosa ja que, pel que fa al propòsit d'aquest assaig, permet empeltar conceptes científics i tecnològics en un relat i fer-los créixer en una estructura narrativa. A més a més, si els nois representen i protagonitzen el relat, tot plegat és molt engrescador i gratificant, i és una gran font de motivació per a tothom, professors i alumnes. Sens dubte, aquesta mena d'imaginació és la responsable del projecte La fàbrica de caps, que he exposat en el capítol anterior. Per això, la immersió de tot el grup classe en un relat no només té un gran potencial motivador sinó també cognitiu, entre altres coses perquè quan el geni col·lectiu aborda la resolució d'un problema, les possibilitats de reeixir-ne són molt més potents que si ho intenta un geni solitari.

Abans he esmentat que s'atribueix a la imaginació l'exclusivitat de la creativitat. Tanmateix, hi ha una objecció important a fer a aquest supòsit, perquè tal atribució postula que d'alguna manera la pròpia representació mental tindria el repertori d'estats en què podria transformar-se, i això implica atribuir a la pròpia representació mental una mena de voluntat pròpia per transformar-se, gairebé una consciència intel·ligent per prendre la forma que vulgui, cosa que no encaixa amb el model de la ment que he exposat.

Per encaixar la funció de la imaginació en el model de les tres ments del geni, sempre circumscrit a l'objecte d'aquest assaig, primer cal concebre la ment com una mena de gresol cognitiu en què la matèria primera és el conjunt de representacions mentals que elaborem sobre el problema que ens ocupa; és a dir, la imaginació ens representa el problema tan bé com pot i com sap, i que no és la mateixa per a cada persona. Quant a les transformacions que s'efectuen sobre aquesta representació del problema, les causen sobretot els llampegueigs heurístics i les accions algorísmiques que se'n poden derivar. Així, ens hem de remetre al coneixement de les heurístiques per completar el binomi de la creativitat: (heurística→imaginació).

Contravenint una creença molt popular sobre la creativitat, la inspiració d'una solució o d'una proposta creativa no prové d'una musa o d'un do que habita a l'apartament mental de la imaginació. Com bé saben les persones que tenen experiència en qualsevol activitat creativa, **que la inspiració t'agafi treballant.**

Com que la finalitat d'aquest assaig és presentar una proposta didàctica per a l'aprenentatge de la ciència i la tecnologia, cal exposar com les heurístiques operen sobre els objectes imaginats, descriure-les amb un mínim de precisió a fi de poder-les manejar des del punt de vista didàctic. A això dedicarem el proper capítol.

## El llenguatge, l'eina del pensament

No es pot tancar aquest capítol dedicat a la ment del geni sense abordar el llenguatge. El geni parla, llegeix i escriu, i en gran mesura, quan pensa ho fa a través de la seva llengua. Tal vegada, la relació entre llenguatge i pensament és la qüestió més debatuda.

da en la història de la psicologia cognitiva (Piaget, 1975; Vigotsky, 1934; Whorf, 1956; Chomsky, 1972; Luria, 1979; Hofstadter i Sander, 2013).

Per a l'objectiu d'aquest assaig n'hi ha prou a perfilar, ni que sigui succintament, com s'engrana el llenguatge en el model de la ment que he exposat, que és imprescindible abans de plantejar el paper del llenguatge en aquesta proposta didàctica.

Si partim del fet que els infants aprenen a parlar la llengua materna sense necessitat d'anar a l'escola, és a dir, que no els cal un entorn d'aprenentatge explícit i formal, i, a més a més, tampoc necessiten fer un esforç cognitiu específic (Kahneman, 2011) per aprendre a parlar, es pot suposar que la ment autònoma hi té un paper important en l'aprenentatge de la parla, que inclou la fonètica, la semàntica i la sintaxi. Ara bé, quant a l'escriptura i a la lectura, sí que els cal un entorn d'aprenentatge explícit i un esforç cognitiu, de manera que és plausible atribuir un paper determinant a les ments executiva i reflexiva en aquests aprenentatges. La primera, per executar l'algorísmica inherent a qualsevol producció lingüística i la segona, per avaluar si les seves produccions lingüístiques tenen sentit.

Tot i que la proposta didàctica que s'exposa en aquest assaig s'adreça a nois i noies amb una competència lingüística de la parla, de l'escriptura i de la lectura prou consolidada per comprendre textos científics o tecnològics a un nivell de divulgació bàsica, d'aquesta didàctica cal esperar-ne un progrés significatiu de les competències lingüístiques de l'alumnat, tant en el camp semàntic com en el sintàctic. Aquest progrés que es basa en un plantejament concret l'objectiu del qual és fer evolucionar el llenguatge natural cap al llenguatge científic i tecnològic. L'exemple següent ho concreta.

*Els dos coets*



Figura 2.7 Vegeu simulació interactiva a <https://scratch.mit.edu/projects/230309468/fullscreen>

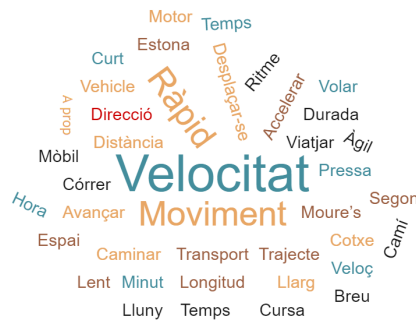


Figura 2.8

Programat amb Scratch, per tal que els nois i les noies puguin modificar després el programa, l'activitat «Els dos coets» (figura 2.7) presenta un cel estelat on dos coets es desplacen en línia recta quan hi cliquem. En tocar la vora dreta, tornen a lloc d'inici. Un dels dos va a una velocitat lleugerament superior a l'altre, de manera que és difícil percebre i comparar les velocitats respectives. A més, els coets no poden fer cap cursa, ja que no es pot fer clic a sobre dels dos coets simultàniament. Es planteja el problema de com s'esbrina quin dels dos és el més veloç.

Cadascú partirà del seu **núvol semàntic** (figura 2.8) de la velocitat, del qual extraurà, o no, una heurística per resoldre el problema. Abans de continuar cal explicar que la idea de núvol semàntic l'he copiada dels populars «núvols d'etiquetes» que trobem en molts webs. M'ha semblat una bona representació i concreció del fragment de la memòria associativa que es mobilitza durant la resolució del problema. A diferència dels núvols d'etiquetes on la grandària d'una paraula significa la freqüència d'aparició d'aquesta en el text que representa, en el núvol semàntic de la memòria associativa les paraules representen idees o els nodes de la xarxa de la memòria associativa, amb tota la càrrega d'imprecisió que comporta l'ús d'aquest concepte. La grandària representa la intensitat de les associacions de la idea. I les diverses inclinacions representen l'ingredient caòtic i anàrquic que impregna qualsevol memòria associativa viva.

La nostra imaginació, l'escenari mental on actuen els nodes, les idees de la memòria associativa, no només és capaç de representar significats sinó que també és capaç d'evocar el so de les paraules, que no són altra cosa que representacions sonores. De manera que si és possible pensar en una idea concreta, com ara la velocitat, és perquè quan pensem operem amb la nostra llengua. Per experiència sabem que en l'acte de pensar sempre hi ha alguna mena de soliloqui. La llengua no la utilitzem només per operar i construir significats, sinó també per raonar i argumentar. La llengua és l'eina del pensament. Continuem desenvolupant l'exemple:

Sobre aquest núvol semàntic (figura 2.8) o un de semblant se sosté la definició natural de velocitat, i anirà bé, a l'aula estant, recórrer al diccionari, llegir-la en veu alta i escriure a la pissarra velocitat: rapidesa en el moviment. Tal definició es construeix associant les idees de rapidesa i de moviment. Aviat veuran que per molt que cliquin els coets, no hi ha manera de percebre'n la diferència de velocitat. De seguida s'adonaran que aquesta idea de velocitat no possibilita cap heurística exitosa.

Tard o d'hora sortirà l'heurística de cronometrar el temps que triga cada coet a recórrer la pantalla, si no, caldrà inspirar-la, que es pot propiciar observant que ambdós coets recorren la mateixa distància, de manera que la clau per resoldre el problema serà comptar el temps amb què ho fa cada coet.

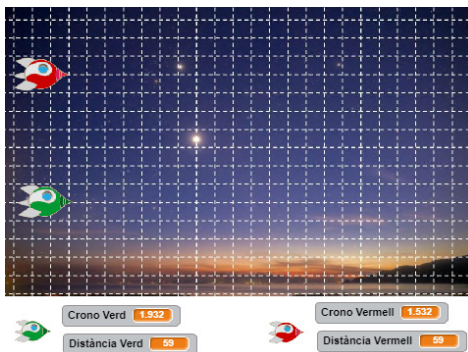


Figura 2.9 Vegeu simulació interactiva a:

<https://scratch.mit.edu/projects/13622227/fullscreen>



Figura 2.10

Aleshores és el moment de passar al segon programa (figura 2.9) i de consolidar l'incipient concepte científic de la velocitat que és a punt d'aparèixer. La quadrícula i la

comptabilitat del temps i de la distància posen a disposició de totes les ments la possibilitat de **coordinar** entre aquestes dues paraules-idea: **distància i temps**. Un pas més i ja tenim la definició científica de la velocitat, **distància recorreguda per unitat de temps**.

Adoneu-vos que en aquest pas, d'un cel diàfan i atemporal cap a un de quadriculat i de temporalitat cronometrada, no s'ha abandonat el primer núvol semàntic de la velocitat, sinó que simplement hem associat dues paraules-idea diferents a les d'abans, fet que s'expressa en la figura 2.10.

Tant en un cas com en l'altre, la definició de velocitat es forma recurrent a altres components del núvol semàntic, però hi ha una diferència entre la construcció de la definició de manera espontània o natural (rapidesa en el moviment) i la construcció científica (distància recorreguda per unitat de temps).

### L'eina recursiva del geni

L'esquema següent (figura 2.11) intenta representar la diferència entre la construcció espontània del concepte de velocitat i la construcció científica. En ambdues situacions es parteix del mateix cel amb coets, però en el primer cas (construcció espontània) la percepció és subjectiva, és a dir, els coets es mouen en línia recta d'una banda a l'altra de la pantalla, però cada percepció individual posarà èmfasi en un o altre detall, per bé que tothom coincidirà en els trets bàsics sobre què veu, és a dir, el canvi de posició. Per contra, en el segon cas s'hi han introduït dos dispositius (un mesurador dels passos que fa cada coet i el cronòmetre) que generen una informació addicional a la subjectiva, la qual és percebuda i observada de manera objectiva i homogènia per tothom, i és sobre aquestes dues observacions que es construeix una nova definició de velocitat. Una observació científica és, doncs, una percepció objectiva, és a dir, que pot ser corroborada per tothom (Popper, 1972).

Però atenció a la mena d'associació que es produeix entre aquestes dues observacions, perquè s'associen d'una manera diferent a la primera situació (figura 2.11). En el primer cas, la connexió entre moviment i rapidesa assigna una propietat o un atribut (ràpid-lent) a un nom (moviment), en què l'atribut és un adjectiu que penja o depèn del nom. En canvi, pel que fa al tipus d'associació entre **distància i temps**, es tracta d'una coordinació entre dues idees, perquè cap d'elles caracteritza o qualifica l'altra, és a dir, que són independents l'una de l'altra.

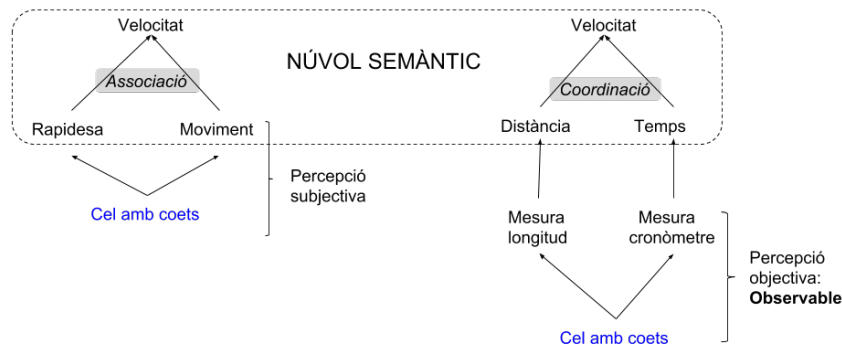


Figura 2.11

Per tot això és determinant que a l'hora d'afrontar un nou aprenentatge s'introdueixi o s'ampliï prèviament el núvol semàntic apropiat per tal de posar en escena, i en la ment de l'alumnat, el context lingüístic imprescindible per ancorar els significats més rellevants, els quals facilitaran i propiciaran la construcció del nou concepte. Si ho fem així apliquem el conegut principi de l'aprenentatge significatiu (Ausubel, 1968).

Seguint la terminologia de l'epistemologia genètica (Piaget, 1975; Foerster, 1977), a aquesta mena d'associacions les anomenarem **coordinacions** (coord) i a les percepcions objectives, **observables** (obs). Aquests dos conceptes, que ampliaré al sisè capítol, dedicat a la construcció i comprensió del coneixement, facilitaran l'expressió d'una característica paradigmàtica tant del llenguatge natural com dels artificials: la recursivitat. En l'esquema de la figura 2.11 ja s'hi apunta.

Es diu que una regla o un procés és recursiu quan aquest s'aplica de nou al resultat d'haver-lo aplicat prèviament. Al marge del prolífic desenvolupament d'aquest paradigma en diferents disciplines com la informàtica, la matemàtica, la biologia i les magnífiques expressions artístiques de la geometria fractal, pel que fa a les ciències cognitives, la recursivitat té un paper rellevant en la construcció del coneixement. Ampliem l'exemple dels coets.

El concepte de velocitat el construïm coordinant els observables distància recorreguda i temps:

$$(1) \text{ velocitat} \leftarrow \text{coord} (\text{distància, temps})$$

Una vegada construït el concepte de velocitat, aquest esdevé un nou observable, ja que la mesura de la velocitat de cada coet és una percepció objectiva que, si es presenta en un context adequat, permetrà observar si aquesta velocitat és uniforme o variable. Per exemple, imagineu que un dels dos coets accelera i l'altre manté una velocitat constant. Si coordinem la variació de la velocitat amb el temps construïm el concepte d'acceleració:

$$(2) \text{ acceleració} \leftarrow \text{coord} (\text{velocitat, temps})$$

Si substituïm (1) en (2):

$$\text{acceleració} \leftarrow \text{coord} (\text{coord} (\text{distància, temps}), \text{temps})$$

Si generalitzem, es pot formalitzar el principi de recursivitat en les construccions cognitives:

$$\text{obs}_{n+1} \leftarrow \text{coord} (\text{obs}_n)$$

De fet, aquest principi és conegut des de temps immemorials per qualsevol professor, sense necessitat de tanta formalització. És com descobrir la sopa d'all. Per aprendre un concepte nou cal saber-ne prèviament uns altres. Així s'ordena la progressió curricular de cada disciplina; és el mateix principi amb què es fan les definicions dels diccionaris. Tot i l'aparent simplicitat del concepte de recursivitat, si s'aprofundeix en la seva lògica apareixeran llacunes, contradiccions i espais foscos, la solució dels quals ha propiciat múltiples recerques, que la consolida com un dels paradigmes més potents de la ciència i la tecnologia contemporània, incloent-hi les ciències cognitives. Tant és així que hi ha estudis que veuen en els processos recursius el motor de l'evolució cognitiva de l'espècie humana (Corballis, 2007; 2011).





# 3

## Heurístiques

*Tanmateix, la meua opinió del tema —valgui el que valgui— és que no existeix, en absolut, un mètode lògic per tenir noves idees, ni una reconstrucció lògica d'aquest procés.*

**K.R. Popper.** *La lògica de la investigació científica*, 1934

*Un dia, de sobte, com sempre passa en aquestes coses, vaig trobar la solució.*

**F. Pessoa.** *El banquer anarquista*, 1922

A la pantalla s'hi veu la figura 3.1.

—Coneixeu la llegenda dels sentinelles? La millor manera d'explicar-la és representant-la. Així que necessito dos sentinelles.

Un munt de mans es presenten voluntàries. Trio una noia i un noi. Els col·loco a cada banda de la pantalla i dono una targeta a cada un amb i els demano que mirin què hi ha escrit i que no ho mostrin. En una hi ha escrit: Mentider. Porta falsa. I en l'altra: Sincer. Salvat.



Figura 3.1



Figura 3.2

– Hi havia una vegada un castell on habitaven un drac infernal i dos sentinelles que custodiaven, cada un, una porta. Vet aquí que per un malefici, que us contaré en una altra ocasió, un de vosaltres va a parar a l'interior del castell, davant mateix dels dos sentinelles. Així que el drac el veu, la boca se li fa aigua i treu foc per rostir-lo. Però, sempre hi ha d'haver un però en una història, si no, no tindria gràcia. Així que llegiu

amb atenció el cartell que hi ha: «Un del sentinelles sempre diu la veritat i l'altre menteix. El sincer custodia la porta de la salvació. El mentider, la porta falsa. Els pots fer una sola pregunta. Però, compte, només saben contestar sí o no. Tries un sentinella i li formules la teva pregunta. Un últim advertiment: si la teva pregunta no té per resposta un sí o un no, els sentinelles arronsaran les espatlles, que és un senyal al drac per tal que rosteixi a qui no ha pensat una bona pregunta.

Demano que tothom apunti la seva pregunta. Passejo un moment entre les taules tot ullant les preguntes escrites, a la cerca d'una que es refereixi a les condicions de l'enunciat, com ara: Tu ets el mentider?, Tu ets el sincer?, El teu company menteix, etc. Normalment se'n troben, i en trio una per començar el torn. Com que aquestes preguntes tenen respostes idèntiques per part dels sentinelles, l'efecte sorpresa està assegurat. Naturalment, tothom prendrà nota de la mena de pregunta de la primera persona que aconsegueix salvar-se, i de seguida es veuran unes quantes cares il·luminades per la revelació heurística i les mans que refan la pregunta que havien escrit. Quan ja es fa evident que les preguntes salvadores són les que contenen una proposició de la qual tothom pot dir si es certa o falsa (jo tinc dos caps?, per exemple), de manera que el mentider entrarà en contradicció, el joc perd l'interès. Llavors, és quan el compliquem una mica més.

—No us penseu pas que us heu salvat —canvi de pantalla. Surt la figura 3.2—. El joc dels sentinelles pot ser una història interminable. Només heu superat el primer obstacle. Ara sou davant del segon mur, que també té dues portes, A i B. Per un sortilegi que us contaré en una altra ocasió, els dos sentinelles se us han avançat i el drac ha sortit darrere vostre. Però ara els sentinelles jeuen tranquil·lament i no són davant de cap porta; naturalment saben quina és la porta de la salvació i quina la de la perdició. Continua havent-hi el sincer i el mentider, però ara han après a parlar i poden contestar amb qualsevol paraula. I tenen tantes ganes de parlar que tots dos contestaran la teva pregunta.

Reparteixo les targetes de mentider i sincer als sentinelles, i, a més a més, una altra d'igual per als dos on es diu: A és la porta falsa. B és la porta de la salvació. En tinc una altra amb les portes canviades, que farà servir quan es rellevin els sentinelles. Evidentment, la pregunta ja no és tan fàcil com l'anterior i, en general, se salva poca gent. I, una vegada el drac s'ha cruspit la classe sencera, és el moment de provocar una pluja d'idees per inspirar per on pot anar la bona pregunta.<sup>12</sup>

Sovint he utilitzat aquest enigma per introduir la importància i la necessitat d'aprendre a formular preguntes de manera «científica». De fet, aquesta és una de les primeres activitats que faig quan agafo un nou grup d'alumnes. La necessitat d'ensenyar a preguntar m'ha portat tant a aprendre'n jo mateix com a desenvolupar una mínima metodologia didàctica al respecte, i també a encaixar la producció de preguntes en el marc cognitiu que he exposat al capítol anterior. Crec que es pot parlar amb propietat d'una heurística de la interrogació i de la curiositat, que desenvoluparé tot seguit, una vegada hagi aprofundit una mica més sobre les heurístiques.

Un apunt sobre les pluges d'idees: són una amalgama d'heurístiques generades per ments diferents que es realimenten mútuament. I això últim és important valorar-ho a fi d'atorgar el mèrit o l'autoria de les idees, ja que, en aquest context, una bona idea d'una persona acostuma a tenir una idea precursora o antecedent en una altra persona.

## D'heurístiques i problemes

Recordeu les tres característiques bàsiques d'una heurística:

- Són **ràpides i simples** perquè necessiten de poca informació per activar-se.
- No són el resultat d'un **esforç mental**.
- Són **autònomes**, és a dir, que no les produïm d'una manera voluntària, ens venen al cap quan som interpellats de manera directa per algun requeriment o per un problema, o bé quan hi pensem.

Les heurístiques són intuïcions proactives que la nostra ment autònoma ens presenta de manera espontània i automàtica quan se'ns demana de resoldre un problema. Com a esdeveniments que es produeixen en el nostre espai mental, no són objectivables, perquè no es poden observar, només les poden relatar els subjectes que les experimenten. Són experiències cognitives subjectives, íntimes. Tot i que la introspecció o els relats d'experiències personals no són una prova que són realitat i que existeixen, ningú no nega les seves pròpies intuïcions, fins i tot si no els dona cap credibilitat. Un fet que es pot corroborar, malgrat que és una experiència totalment subjectiva, és que les nostres heurístiques sempre són concretes, amb independència de si tenen èxit o no. Per molt confusament que llampeguin el seu contingut no és abstracte ni genèric, les heurístiques no són especulacions ni reflexions, són pensaments concrets.

De vegades, les heurístiques ens llampeguen d'una manera clara i evident. I se'ns acudeixen en moments en què no estem pensant en el problema al qual es refereixen (Poincaré, 1908). Altres vegades són molt esmunyedisses i esquivoles, d'un llampegueig tènue, i quan es manifesten dèbilment, passen per la nostra consciència d'esquitllada, i a penes s'entreveuen durant l'instant previ a les accions algorísmiques que desencadenen. Poden obrir portes impensades, i, sovint, quan n'obren una, l'atenció se'ns va cap el paisatge que mostra la nova via cognitiva, de manera que és fàcil oblidar com hem accionat la maneta per obrir la porta. Tot i que algunes són modestes i precàries, n'hi ha que són esclatants i colpidores, que deixen un rastre emocional perdurable. Qui no ha exclamat mai: tinc una idea!

Bones o dolentes, encertades o errades, les idees brillen un sol instant. Com que són esclats sintètics de clarividència i no seqüències lineals de contingut, cal gruar per traslladar-les al regne de la lògica, del llenguatge o de la representació, les úniques eines que tenim per expressar-les o descriure-les. Noteu que quan se'ns acut una heurística i la verbalitzem *a posteriori*, de vegades expressar-la no sempre és una tasca planera.

Una altra consideració important sobre la naturalesa de les heurístiques rau a considerar-les com a **pautes per a l'acció**. Com a respostes a un problema, es poden considerar **plans d'execució** que un llampegueig intuïtiu ens presenta de manera global, condensada i sintètica. En conseqüència, no se'ns presenten verbalitzades. A efectes didàctics, es fa necessari destriar l'heurística en si mateixa de les accions algorísmiques que anticipen, d'aquí el binomi  $H \rightarrow A$ . Correspondrà a la ment reflexiva

racionalitzar el pla d'acció tot ordenant l'execució algorísmica a partir de la pauta que han indicat.

Al llarg de tot aquest assaig no se us escaparà una clara prevalença de l'heurística sobre l'algorísmica, i prova d'això és que no dedicaré un capítol sencer als algorismes, per bé que els esmentaré sovint. La justificació és molt prosaica, si voleu. Els currículums i les didàctiques específiques en van plens, d'algorismes, i la major part dels aprenentatges escolars i de les competències científiques i tecnològiques se centren en coneixements procedimentals que no són sinó algorismes.

El paper de les heurístiques en els aprenentatges escolars així com l'explotació epistemològica i didàctica de les heurístiques errònies són dues realitats poc investigades, per bé que arreu del territori escolar hi ha un munt de bones pràctiques docents que, per pur instint professional, es mouen en aquests paràmetres. És una bona pràctica docent dedicar temps a bregar amb els errors dels nois i de les noies per tal que n'extreguin coneixement.

Quan es té un mínim rodatge docent amb un problema concret i s'han treballat i esmenat prou heurístiques errònies de l'alumnat, se'n destil·la la bona. Llavors és el moment de descriure-la, no pas per ensenyar-la (en el sentit literal del verb) sinó per millorar la presentació del problema i facilitar-ne el descobriment.

De fet, l'eix central d'aquest assaig tracta de perfilar les heurístiques més rellevants sobre les quals es basteixen els aprenentatges científicotècnics i per explotar didàcticament els errors que generen. Tant si ens en sortim com si no, sempre som capaços d'afrontar i assajar solucions per resoldre qualsevol problema. D'alguna manera, el nostre inconscient cognitiu conté una caixa d'eines heurístiques que fa possible les nostres temptatives per resoldre'ls. El que s'intenta aquí és esbrinar els compartiments de primer nivell i perfilar les eines que contenen.

Recordeu també que el concepte de problema més genèric es refereix al plantejament d'una situació de solució desconeguda, la qual s'ha d'obtenir a través de mètodes rigorosos. Tal mètode ha de seguir el cànon clàssic de la resolució de problemes (Pólya, 1945), a saber: comprendre el problema, concebre un pla, executar-lo i examinar la solució obtinguda. El segon i tercer punts, la concepció del pla i la seva execució, es poden assimilar al concepte d'estratègia, cosa la qual s'adiu amb la definició que el diccionari fa d'estratègia: l'art de coordinar accions i de maniobrar per tal d'aconseguir una finalitat. Aquesta diferenciació entre l'estratègia i la seva concepció s'ajusta prou bé i encaixa amb l'esquema que ja he esmentat diverses vegades: el binomi heurística – algorísmica ( $H \rightarrow A$ ), que deriva del model de la ment exposat al capítol anterior.

En els apartats següents s'exposen les sis heurístiques que crec més rellevants en el procés d'aprenentatge-ensenyament de projectes tecnocientífics:

- Heurístiques de la interrogació.
- Heurístiques de l'exploració i del descobriment.
- Heurístiques del raonament per analogia.
- Heurístiques del raonament per deducció.
- Heurístiques del raonament per inducció.
- Heurístiques del prototip.

## De la curiositat a les heurístiques de la interrogació

Una lliçó mor quan ningú no pregunta. Les preguntes expressen curiositat i la curiositat és una de les mares de la ciència.

Recordeu que la ment autònoma està especialment dotada per distingir el que és sorprenent o singular del que considerem com a normal o habitual, i quan això s'esdevé, les preguntes ens llampeguen a la consciència i ens interpel·len. Immediatament, la ment racional les passarà pel sedàs del llenguatge i, tot mobilitzant la ment algorísmica, es formularan preguntes.

L'ésser viu és curiós per necessitat, perquè, per sobreviure, ha d'adaptar-se al seu entorn i per fer-ho l'ha de conèixer. Per això el seu sistema perceptiu escaneja contínuament la realitat a la recerca de qualsevol esdeveniment rellevant, per insignificant que sigui. I en aquest punt és on cal recordar la màxima de Sherlock Holmes: **el diable s'amaga en els detalls**, ja que, en el que considerem normal, una ment perspicaç pot observar alguna cosa de rellevant en fets d'aparença insignificant. La història de la ciència ens en dona un munt d'exemples. D'una bona observació han sortit preguntes que han tingut una transcendència cognitiva notable. Encara avui dia les repetim a les aules. Però la curiositat també té una vessant instintiva i proactiva del subjecte cap als objectes, perquè ens agrada modificar-los, regirar-los o alterar-los d'alguna manera. Els infants ens ho ensenyen contínuament quan tenen un objecte a les mans. Aquesta actitud manipuladora, fins i tot la destrallera, és una de les fonts de la innovació tecnològica.

En tot cas, les preguntes són un reconeixement conscient de la nostra ignorància sobre el que ens interroga, de manera que sintetitzen un problema a la vegada que el justifiquen. Sense aquestes preguntes no es poden plantejar els problemes que s'han de resoldre, només existirien proposicions informatives que, per si mateixes, no porten enlloc. Una pregunta és el fruit d'una heurística interrogativa quan la complexitat del coneixement ens depassa i ens mostra la nostra ignorància.

Al capítol anterior s'ha vist que les heurístiques les genera la ment autònoma a requeriment de la ment reflexiva. I ja he exposat que, malgrat que siguin el fruit d'una activitat cognitiva inconscient, és possible educar la ment a ser proactiva per generar heurístiques. El pensament heurístic, com qualsevol altra mena de pensament, també s'educa.

Una didàctica per idear preguntes, doncs, és possible i és cabdal per a una educació crítica del pensament científic. Acostumo a demanar al meu alumnat que finalitzi els seus treballs amb preguntes relacionades amb el tema que han desenvolupat. També en demano als exàmens, i acostuma a ser la pregunta (valgui la redundància) que més puntua, si és bona. A més, analitzar les preguntes del teu alumnat proporciona molta informació sobre el seu aprenentatge.

És important aprendre a fer-se preguntes més enllà de la tendència natural a construir-les tot iniciant les oracions (proposicions) que descriuen un fet observable amb la combinació d'una preposició i un pronom interrogatiu. Em refereixo a repetit «per què», que se'n fa un ús abusiu. Per exemple:

[Per què] El plom és més dens que el ferro.

[Per què] El cel es blau.

[Per què] Un motor elèctric de corrent continu pot canviar el sentit de gir.

[Per què] 17 és un nombre primer.

La resposta a un **per què** acostuma a ser una explicació. En l'àmbit científic, la construcció d'una explicació té un protocol molt exigent i no és un aprenentatge curt. Si una pregunta l'encapçala un **per què** és que ens estem preparant per elaborar una explicació i hem d'assegurar-nos que els nois i les noies tinguin assumits els coneixements necessaris que demana l'explicació. L'explicació, per ella mateixa, ni descobreix ni elabora nous coneixements, sinó que els coordina i els organitza d'una manera determinada (ho tractaré més endavant) per fer-los entenedors i coherents. L'heurística interrogadora que pot mobilitzar un **per què** pot ser molt infructuosa, si no es disposa dels coneixements implicats.

No obstant això, hi ha moltes relacions causals en els currículums que tenen una explicació prou curta i senzilla per plantejar-les a través de preguntes encapçalades amb un **quant** o amb un **com**.

- Com esbrinaràs si el plom és més dens que el ferro?
- Com pots canviar el sentit de gir d'un motor elèctric de corrent continu?
- Com esbrinaràs si el 17 és un nombre primer?

Sovint l'estratègia del **com** és més eficient, per concreta, que la del **per què** (Wagensberg, 2006).

Una segona estratègia didàctica per facilitar la formulació de preguntes és la del «**què passaria si...**» o «**com seria si...**». Es tracta de canviar o variar, de manera real o imaginada, un element d'un fenomen observable o un component d'un objecte. Procedint d'aquesta manera generem hipòtesis i hi especulem. Recordeu que les heurístiques, a part de proposar pautes d'acció per resoldre un problema, també aventuren i elaboren judicis, és a dir, són conjectures.

Tal manera de procedir es fa modificant l'estructura interna de la proposició que descriu el fenomen i construint una relació de causa-efecte amb la conjectura que aventurem.

Anem a pams, perquè els àmbits d'aplicació d'aquesta estratègia són molt diversos i faciliten la construcció de relats molt imaginatius. Vegem-ho amb exemples:

- Investiguem els pèndols i n'hem fet un. Cronòmetres en mà comptem les oscil·lacions que fa en un minut. El «**què passaria si...**» és pot convertir en bones preguntes com: què passaria si augmentem la grandària de la bola ? I la longitud del fil? I si el llancem de més amunt? Totes originen noves experiències i observacions.
- Hi ha àmbits especialment interessants en què l'aplicació d'aquesta estratègia dona resultats sorprenents i molt imaginatius (Kaku, 1994). Un respon a la pregunta: com seria el món si tingués dues dimensions? Inspirem-nos en la clàssica novel·la *Planilàndia*, de R. Abbott (1838-1926). S'hi podria botar una pilota? Com seria un partit de bàsquet? I un de ping-pong? Els éssers vius podrien tenir un aparell digestiu tal com el coneixem? Com seria un món d'una sola dimensió?
- Si s'està estudiant el principi d'acció-reacció, una bona pregunta, i imaginativa, consisteix a pensar com seria un partit de futbol a l'espai, en absència de fregament i de sòl.

- Una altra de biologia: què li passaria a un bosc si els fongs i altres microorganismes no descomponguessin les fulles que cauen dels arbres?

Una tercera estratègia per generar bones preguntes se la pot anomenar l'**estratègia de la commutació**. Consisteix a capgirar l'ordre causa-efecte d'un fenomen físic conegut. I és una manera de generar preguntes que té la seva rellevància històrica, la més famosa va obrir l'era de l'electromagnetisme.

Any 1820. Lloc: Universitat de Copenhaguen. El físic **Hans Christian Ørsted** descobreix que el corrent elèctric, en passar per un fil conductor convenientment posat sobre l'agulla d'una brúixola, la mou i la fa girar (figura 3.3). És una experiència fàcil de reproduir. El descobriment es basa en una inferència deductiva entre tres proposicions que expressen observacions clares i precises, que els nois i les noies han d'haver fet, a saber:

1. L'única cosa capaç de moure a distància un imant és un altre imant (o el ferro)
2. L'agulla de la brúixola és un imant.
3. L'agulla es mou quan passa corrent elèctric pel cable.

**Per tant, el corrent elèctric actua com un imant.**

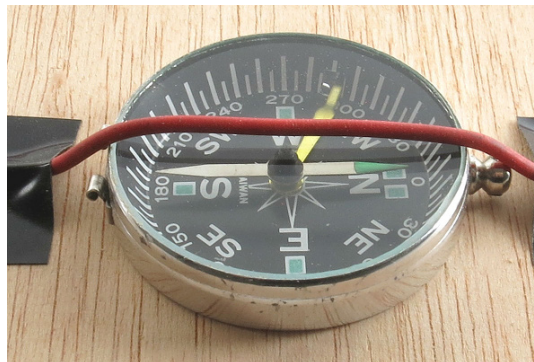


Figura 3.3

Una vegada interpretat el fenomen, és a dir, que el **corrent elèctric crea un camp magnètic**, capgirant l'ordre dels substantius de la frase en surt la pregunta que fou crucial en la història de la ciència i la tecnologia: **pot el magnetisme crear corrent elèctric?**

Aquesta pregunta crea el problema i genera les heurístiques corresponents, que no són gens immediates com demostra la munió de científics de l'època intentant de trobar la manera de crear electricitat a partir del magnetisme. Faraday va obrir el camí construint el primer generador elèctric (Faraday, 1839). Tot i que la via cognitiva que cal transitar per arribar a concebre i construir un generador elèctric a l'abast de l'alumnat no és pas curta, la descoberta és perfectament factible, des del punt de vista didàctic, per a l'ESO (Achón, 1984 ).

La quarta heurística de la interrogació potser és la més espontània de totes ja que es deriva directament de la gran capacitat, i fèrtil, de la ment autònoma per generar ana-



logies. Sovint, l'establiment d'una analogia o bé és una conjectura en ella mateixa o se segueix d'ella. En tot cas, una conjectura conté una pregunta: **és cert que...** A sota, un parell d'exemples de **l'estratègia de la conjectura**:

Suposeu que ja s'ha esbrinat que de tots els rectangles amb el mateix perímetre, el quadrat té l'àrea màxima. Per analogia es conjectura que de tots els prismes rectangulars amb la mateixa superfície, el cub tindrà el volum màxim.<sup>13</sup>

Quan es comença a treballar els nombres primers, de seguida es demostra que cap nombre parell no és primer. Però no faltarà l'analogia que conjecturi si tots els nombres senars són primers. És una bona pregunta per debatre i acotar el domini de la conjectura.

La curiositat i la necessitat de conèixer generen heurístiques de la interrogació, que són fèrtils si contenen el germen d'un problema i el defineixen amb prou claredat.

Tot i que he apuntat quatre mètodes per ensenyar a generar preguntes, ni de bon tros crec haver esgotat el tema. El que s'imposa és el principi epistemològic del **tot s'hi val** per formular una bona pregunta (Feyerabend, 1970).

## Heurístiques de l'exploració i del descobriment

Si després de llegir o formular un problema s'entreu que la solució passa per examinar diferents opcions que són enumerables i practicables, és a dir, que es poden definir i concretar atenent-nos a un criteri prou precís per generar-ne variacions, aleshores som davant d'una heurística exploratòria.

Les heurístiques de l'exploració acostumen a ser discretes quan llampeguen la seva proposta. La seva llumeta és més aviat tènue i sovint no va acompanyada d'una gran emoció, ja que no són portadores de la solució ni conjecturen res, tan sols indiquen que la solució pot trobar-se explorant les possibilitats o alternatives que genera el **criteri de variació** que ha inspirat el propi problema. Els procediments per efectuar aquestes variacions els presenta directament l'heurística, tot seguint l'esquema  $H \rightarrow A$ , de manera que a través d'un conjunt d'accions algorísmiques es podrà enumerar i definir cadascuna de les variacions i, llavors, ve l'exploració pròpiament dita, en què caldrà observar-les o examinar-les una a una.

Primer pot semblar que l'heurística de l'exploració és poc incentivadora, perquè una vegada ens obre la porta, a penes entreveiem el paisatge cognitiu que mostra, ja que es fa necessària l'acció de diversos algorismes per construir l'espai de l'exploració, i això porta el seu temps. Vull dir que l'heurística en si no concreta cadascuna de les variacions, tan sols proporciona el criteri de la variació. Però una vegada creat l'espai d'exploració i ben examinades una a una les alternatives, sovint ens portarà cap a un descobriment interessant.

Exploració i descobriment caminen agafats de la mà. Explorem amb l'expectativa de descobrir alguna cosa, de trobar la solució en alguna de les seves variacions, cosa que posa en alerta al sistema I, el qual, tal com ja he esmentat, és expert en distingir el que es sorprenent del que és normal. La presa de consciència d'un descobriment és un llampec de clarividència i el geni intuïtiu n'és l'autor. No obstant això, el mèrit és compartit perquè és la ment algorísmica del sistema II la que ha generat l'espai



d'exploració, amb cadascuna de les alternatives que s'han d'examinar, on es troba la solució.

Vegem-ne un parell d'exemples.

### El trencaclosques de Copèrnic

Corren els primers anys del segle XVI. Poseu-vos dins el cap de Copèrnic, quan tot just acaba d'apostar pel model heliocèntric del sistema solar: la Terra, com la resta dels planetes, rota pel seu eix Nord-Sud i orbita al voltant del Sol. Tot just acaba de dibuixar un esquema de la seva visió: el Sol al centre de la pàgina i als extrems, a dalt, a baix, a la dreta i a l'esquerra, l'esfera de la Terra. Quatre posicions, una per estació. I quan vol dibuixar l'eix de la Terra, amb el seu nord i el seu sud, de cop, un seguit de preguntes el desconcerta: com es trasllada en realitat? Sempre igual? Va canviant a mesura que avança? Està clar que la Terra rota sobre aquest eix, i això produeix la nit i el dia, però els dies i les nits no tenen la mateixa durada al llarg de l'any, aleshores, l'eix i la Terra canvien alguna cosa? De posició? De posició respecte què? De la seva òrbita? Però aquesta sempre és monòtona, la Terra no va donant bots amunt i avall, si no ho notaríem. Les òrbites són rodones però planes.

Un raonament li fa bullir el cap: l'eix de la Terra no pot ser vertical al pla de la seva òrbita, perquè si ho fos, les nits i els dies durarien igual al llarg de l'any, i això no és pas veritat. A l'hivern les nits són més llargues que a l'estiu, que són més curtes.

Content per aquesta descoberta, avança una conclusió: per força, doncs, l'eix de la Terra es trasllada inclinat respecte al pla de la seva òrbita. I, per fi, arriben les bones preguntes: respecte al pla de la seva òrbita, com és aquesta inclinació? Sempre ha de ser la mateixa, perquè, si no, ho notaríem i aniríem fent giragonses.

Copèrnic era una persona sistemàtica, així que es va posar a **explorar** les maneres d'inclinar un eix i de desplaçar-lo tot mantenint la mateixa inclinació. D'aquí en sortirien unes quantes opcions. Després havia d'**argumentar** quina opció era la que encaixava amb la realitat. I la realitat era que durada del dia i la nit era diferent al llarg de l'any, de manera que havia d'esbrinar com seria la durada del dia i la nit per a cada opció.

Es necessiten unes quantes maquetes de la Terra amb un peu estable que permeti posar-la tant vertical com inclinada, i una espelma o un llum per simular el Sol. I cadascú va fer la seva maqueta (figura 3.4).

Després d'una pluja d'idees vam definir unes quantes inclinacions possibles amb les nostres maquetes. He de dir que jo en tenia preparats quatre, però una alumna, C.F., va suggerir-ne amb molt encert una cinquena possibilitat, que immediatament vaig integrar als meus materials didàctics. Les cinc exploracions són aquestes:

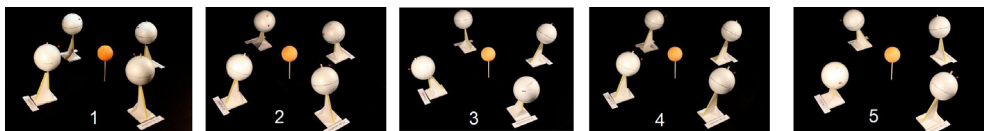


Figura 3.4

1. L'eix de la Terra es trasllada perpendicularment al pla de l'òrbita (figura 3.4.1).
2. L'eix de la Terra es trasllada inclinat cap a l'interior del pla de l'òrbita (figura 3.4.2).
3. L'eix de la Terra es trasllada inclinat cap a l'exterior del pla de l'òrbita (figura 3.4.3).
4. L'eix de la Terra es trasllada inclinat, en paral·lel i mantenint l'orientació (figura 3.4.4).
5. L'eix de la Terra es trasllada inclinat i en fila seguint la línia de l'òrbita (figura 3.4.5).

Una vegada definides aquestes cinc possibilitats, cal observar, per a cada una, **la durada del dia i la nit** durant els quatre moments astronòmics que donen pas al canvi d'estació. De l'observació sistemàtica de cada exploració, contrastada amb les observacions reals de la durada del dia i la nit, es deduirà quina d'aquestes opcions és la real.<sup>14</sup>

### El pèndol del temps

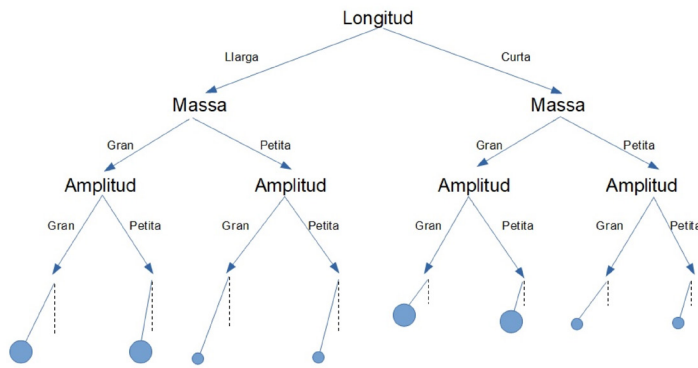


Figura 3.5

A l'apartat anterior ja he posat com a exemple que l'observació i la manipulació experimental d'un pèndol possibilita la generació d'heurístiques interrogatives com: «què passaria si augmentem la grandària de la bola?, i la longitud del fil?, i si el llancem de més amunt?». Són preguntes prou concises per generar i obrir l'exploració:

*Fes diversos pèndols combinant una corda llarga i una altra de curta amb una bola gran i una altra de petita. Després, els llences amb dues amplituds diferents. En total tindràs vuit observacions (figura 3.5); per a cadascuna compta el nombre de vaivens per minut. Examina les dades.*

La generació de les vuit observacions (figura 3.5) és clarament una activitat algorísmica en què es combinen les tres variables del pèndol (longitud, massa i amplitud) per tal d'obtenir cadascun dels vuit pèndols que s'observaran. Tot plegat corrobora el binomi  $H \rightarrow A$ , **que ja he explicat en el capítol anterior.**

Amb les dades a la mà, la descoberta està servida; de seguida inferiran que els vaivens per minut només depenen de la longitud del pèndol. Les respostes a cada pregunta són clares i contrastades per l'experimentació.

No se'ns pot escapar que en alguns casos el concepte d'heurística de l'exploració, com en l'exemple del pèndol, és molt proper al de **variable** física, però també és clar que l'ultrapassa, tal com mostra el primer exemple.

També li és molt proper el concepte d'espai d'un problema (Newell i Simon, 1972; Smith i Kosslyn, 2007) que s'aplica a una determinada classe de problemes en què hi ha un estat inicial i un estat final o solució. Mitjançant una sèrie d'operacions definides

pel problema, aplicades a l'estat inicial i als estats generats, se'n deriva una exploració de les possibilitats entre les quals es troba l'estat final. Un exemple clàssic són les conegudes Torres de Hanoi, on l'espai del problema es genera a través d'un arbre que té l'origen en l'estat inicial, i, a partir d'aquest, les possibles «jugades» determinen els estats del nivell següent i així successivament, fins exhaurir tots els nivells possibles, a l'últim del qual trobarem l'estat final o objectiu.<sup>15</sup>

El cub de Rubik, per exemple, cauria dins d'aquesta categoria de problemes, així com els jocs d'estratègia (dames, escacs, go, etc.). Ara bé, cap ment humana, com tampoc els actuals programes d'intel·ligència artificial que juguen a aquests jocs, procedeix d'aquesta manera, és a dir, explorant de manera exhaustiva totes les possibilitats, sinó que s'apliquen heurístiques.

## Apunt sobre els raonaments natural i formal

Sovint es pressuposa que un raonament ben elaborat ha de seguir les irrefutables lleis i regles de la lògica. En conseqüència, si se n'aparta i no les segueix queda desqualificat automàticament.

No obstant això, quan t'endinses en l'estudi de la lògica, la primera cosa que palesen els manuals (Copi i Cohen, 1978; Muñoz, 2004) és que hi ha moltes menes de lògiques, de manera que és més encertat parlar de lògica en plural, és a dir, de sistemes lògics. Un criteri de classificació dels sistemes lògics rau en el nombre de valors de veritat que s'accepten en els seus càlculs. Es parla de **lògica clàssica** quan els càlculs són bivalents, és a dir, que les fórmules o expressions poden ser veritables o falses i no pot ocórrer que ho siguin a la vegada.<sup>16</sup> Però si en els càlculs lògics se'n preveuen més, de valors de veritat o d'altres recursos expressius que no siguin la veritat o la falsedat, llavors es parla de **lògiques no-clàssiques**.<sup>17</sup>

Els raonaments elaborats amb les lleis i les regles d'aquests sistemes lògics són els que anomenem **formals**, amb independència de si és una persona humana o una intel·ligència artificial qui els fa. En canvi, si ens referim al raonament que fem les persones, grans o petites, quan pensem de manera **espontània**, i que vehiculem a través del llenguatge oral o escrit, l'anomenem raonament **natural**.

Entre els raonaments formals i els naturals hi ha conceptes comuns ja que, en definitiva, la lògica, de la mena que sigui, és, en primera instància, una activitat humana, i cada sistema lògic parteix d'un tipus de raonament natural, per bé que després s'enfil cap els seus dominis. Així, per exemple, al càlcul proposicional de la lògica clàssica també se'l coneix com el sistema de deducció natural perquè els nexes entre proposicions són nexes lingüístics d'ús freqüent (no, i, o, si... aleshores..., si i sols si, per tant).

Des de la perspectiva de la psicologia cognitiva, un raonament natural és un procés mental mitjançant el qual una persona extreu una conclusió d'un coneixement que ja sabia. En termes generals, la nostra ment té la capacitat d'inferir nous coneixements tant a partir de coneixements apresos com de les seves percepcions més immediates. Aquesta extracció cognitiva la du a terme la ment autònoma i té un caràcter concloent, és a dir, que respon a algun requeriment formulat per la ment racional.

Tanmateix, recordeu que les heurístiques sempre estan subjectes a errors i a biaixos cognitius, de manera que correspon a la ment racional avaluar les heurístiques del raonament. Aquesta divisió de funcions entre la ment racional i l'autònoma desfà

l'aparent paradoxa de qualificar com a heurístic un raonament, la característica fonamental del qual és ser precisament racional.

Segui com sigui que ho fa la ment autònoma, el cas és que presenta a la consciència propostes conclusives que extreu bé dels nodes actius de la seva memòria associativa (idees, coneixements), bé de les percepcions immediates, que constitueixen la matèria cognitiva primària, concepte que equival al de premissa en la lògica formal.

Aquests salts heurístics que fan els raonaments naturals marquen una diferència radical amb els raonaments formals, ja que tant per fer com per validar un raonament necessiten disposar de les premisses i de les conclusions. Prova d'això són els teoremes matemàtics, en què és necessari conèixer les hipòtesis de partida (premisses) i la tesi (conclusió), la feina consisteix a demostrar la tesi sense sortir-se dels paràmetres que marca el mètode deductiu. Però el fet epistemològic és que prèviament a una demostració sempre hi ha una intuïció que n'ha revelat l'objectiu i que guia la demostració (Poincaré, 1908).

Així, doncs, es pot diferenciar clarament entre els raonaments naturals i formals tot definint els espais que comparteixen. Ambdós necessiten de premisses com a punt de partida, però les respectives actuacions posteriors són molt diferents. Els primers extreuen la conclusió sense atendre cap llei o regla lògica, i com s'ho fa la ment autònoma, tant si l'encerta com si no, és ara com ara una autèntica caixa fosca; és per això que necessitem una ment racional, si no, tot plegat seria un caos cognitiu. Els segons, com que disposen de lleis i regles perfectament definides, la seva feina és elaborar càlculs lògics per validar o refutar les conclusions. Part d'aquestes lleis i regles lògiques són d'extracció natural i la ment racional les usa per avaluar les heurístiques.

Qualsevol problema el resollem de manera raonada, de manera que a problemes semblants, raonaments semblants. I si ens atenem a la seva freqüència i a la rellevància històrica en la construcció del coneixement científic, es distingeixen tres classes de problemes en què els raonaments són de la mateixa mena. Aquesta distinció, òbviament, també afecta els currículums de ciència, matemàtica i tecnologia. Amb tot, aquestes tres maneres de raonar no representen la totalitat de les maneres naturals de raonar i dels sistemes lògics coneguts. Em refereixo a:

- a. **El raonament analògic.** S'estableix entre dos objectes (objecte d'origen, objecte de destí) que presenten un cert grau d'analogia definida entre ells i es **conjectura** que una determinada propietat detectada en l'objecte d'origen n'ha de tenir una igual en l'objecte de destí, si no igual almenys semblant. La conjectura caldrà provar-la.
- b. **El raonament deductiu.** És el cas de la sil·logística i del càlcul proposicional. En el primer, les premisses són afirmacions generals i les conclusions són afirmacions particulars. En el segon, les premisses i les conclusions són proposicions. En un cas i en l'altre, el pas de les premisses a la conclusió es fa mitjançant unes **regles de deducció** que asseguruen la validesa de l'argumentació i la certesa de la conclusió.
- c. **El raonament inductiu.** Les premisses són afirmacions particulars i la conclusió és una afirmació amb un caràcter de llei. El pas de les premisses a la conclusió es fa mitjançant un procés de **generalització** que segons com pot ser asseveratiu o probable.

Com que els coneixements es construeixen, entre d'altres accions cognitives, a cop de raonaments, és obvi que una estratègia didàctica que vulgui empatitzar amb l'alumnat en el pla cognitiu ha d'integrar tant la lògica formal com la natural dels coneixements que pretén ensenyar. Aprofundim, doncs, en cadascuna d'aquestes tres classes d'heurístiques del raonament.

## Heurístiques del raonament analògic

De l'analogia ja n'he parlat a bastament en el capítol anterior. No obstant això, és necessari aprofundir una mica més en el concepte per tal de precisar millor com operen les heurístiques que les generen, i també per concretar i afermar què s'entén per raonament analògic, ja que, acostumats com estem a qualificar qualsevol raonament de lògic, pot semblar fora de context qualificar un raonament d'analògic.

Formalment, quan s'estableix una analogia entre dos objectes S i T és perquè d'alguna manera s'ha fet un **mapatge** un a un entre els elements que els componen, és a dir, propietats i relacions (Hesse, 1966; Copi i Cohen, 1978).

No tots els elements de S i T necessiten ser col·locats en correspondència per establir que són anàlegs, de fet, n'hi ha prou amb què comparteixin un sol element, de manera que l'analogia acostuma a identificar correspondències entre un conjunt selecte d'elements de S i un altre de T. Aquests dos conjunts posats en correspondència se'ls denomina, respectivament, **domini d'origen** i **domini de destinació**. Cal concebre els dominis com paquets de coneixements relatius a un objecte. Òbviament, cosa rellevant en un context ple de subjectivitats com és el nostre, dos alumnes no establiran exactament la mateixa analogia entre S i T, però això no vol dir que des del punt de vista didàctic aquesta no es defineixi amb precisió i profunditat.

Un raonament per analogia té la forma següent:

1. S és similar a T en certs aspectes coneguts.
2. S té una altra característica Q.
3. Per tant, **probablement**, S també tindrà la característica Q, o alguna característica Q\* semblant a Q.

(1) y (2) són les premisses del raonament i (3) n'és la conclusió. A diferència del raonament per deducció, en el cas del raonament per analogia la conclusió no s'afirma sinó que es **conjectura**. És pel fet de conjecturar la conclusió que el raonament per analogia s'aproxima molt al raonament per inducció, en què la conclusió també es conjectura, però aquí es queda i no va més enllà, i es postula la possibilitat de Q\*. De fet, el raonament per inducció es construeix establint analogies entre les proposicions de partida.

Cal posar en context el raonament per analogia, el qual, en el nostre cas, és un problema concret que ens motiva a trobar una solució. El que fan les heurístiques de l'analogia és establir d'un sol llampegueig cognitiu, ni que sigui precari, l'analogia entre algun aspecte del problema que s'afronta (P1) i un altre (P2) del qual es coneix la solució.

Una analogia s'estableix **saltant** del domini d'origen al de destinació i la perxa del salt són les característiques comunes entre els dos dominis. Això últim implica que d'entrada el raonament per analogia estableix un sentit:  $S \rightarrow T$ . En canvi, l'heurística del raonament analògic sembla que actuï a la inversa, almenys així ho mostren els

casos que he analitzat. El subjecte, davant d'un problema (P1) en cerca un altre de semblant (P2), del qual en coneix la solució, de manera que el sentit de l'analogia que fa va de P2 cap a P1.

L'exemple següent ho concreta:

### El volum de la piràmide

Problema: esbrinar com hem de calcular el volum d'una piràmide de base quadrada.

Òbviament, les noies i els nois, quan afronten el volum dels cossos, ja tenen rotatge en el càlcul de les superfícies de les figures planes. També cal suposar que els primers aprenentatges de volums s'han fet sobre el cub considerat com a cos central, del qual s'han derivat (estirant, inclinant o canviant-li la base quadrada per altres polígons) la resta de prismes.

L'analogia entre una piràmide i un triangle és ràpida i clara d'establir, tal com s'exposa a la taula. Si s'ha après a calcular l'àrea de qualsevol triangle, ja es pot conjeturar que el càlcul del volum es pot resoldre d'una manera similar a la dels triangles (figura 3.6), i aquí rau la inferència analògica.

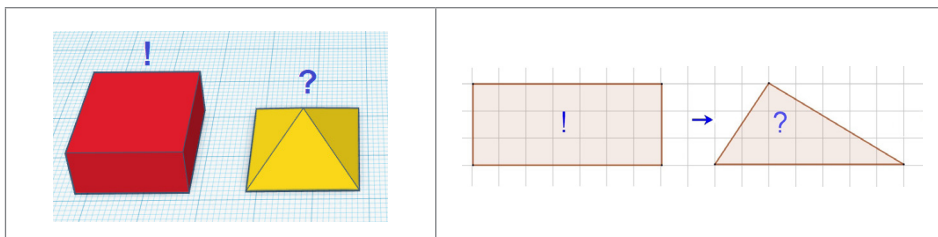


Figura 3.6

El procediment per calcular l'àrea del triangle parteix del fet que se sap com calcular l'àrea del rectangle (en els gràfics, allò que se sap s'expressa amb un signe d'admiració o exclamació, !, i el que no, amb un interrogant, ?). Si component i descomponent triangles aconseguim muntar un rectangle amb la mateixa base i altura que el triangle, ja tenim el problema resolt. Llavors, només queda expressar algebraicament la relació entre les dues superfícies en funció de la base i l'altura:  $At = 1/2 b \times h$

Així doncs, l'heurística de l'analogia conjectura que component i descomponent piràmides també s'aconseguirà muntar el prisma (figura 3.7) que té la mateixa base i altura que la piràmide, del qual se sap calcular el volum (vegeu la taula).

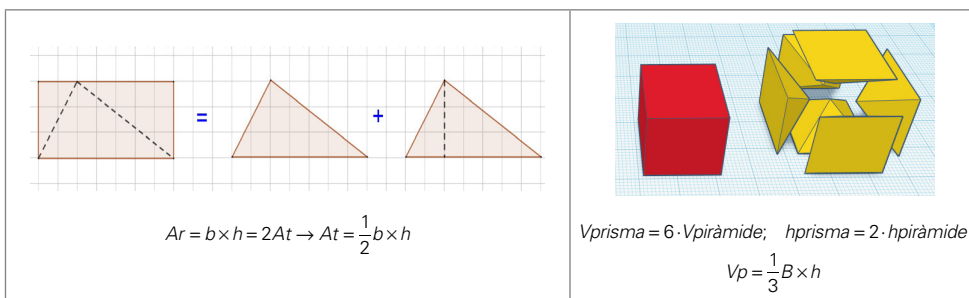


Figura 3.7

De manera que poseu fil a l'agulla i ajudeu-vos d'algun material per construir i visualitzar poliedres sense tapar-ne l'interior (canyetes i escurapipes) o bé d'algun programari 3D que sigui fàcil d'usar en aquestes edats.<sup>18</sup>

La taula següent analitza i organitza l'analogia. A la cel·la ombrejada es detalla l'heurística del raonament analògic.

Domini S		Domini T
Triangle		Piràmide
		Cares laterals triangulars
És una figura de dues dimensions Té superfície	← Analogies parcials conegudes →	Les cares triangulars són figures planes Figura de tres dimensions Té volum
Component i descomponent triangles es formen rectangles	Analogies inferides →	És possible que component i descom- ponent piràmides es puguin formar prismes
Aquestes composicions permeten calcular-ne la superfície	Heurístiques →	És possible que aquestes composi- cions permetin calcular-ne el volum

En aquest cas, la solució es trobarà quan es percebi que sis piràmides componen un prisma, aquest darrer amb el doble d'alçada que la piràmide. Però que una part la conjectura inicial no es verifiqui, no la invalida en el seu conjunt. En el cas del triangle, el rectangle també el doblava en superfície.

A més, comparant les dues fórmules es percep clarament l'analogia entre l'àrea del triangle i el volum de la piràmide. De 2 dimensions es passa a 3; de la base del triangle, d'1 dimensió, és passa a la base de la piràmide, de 2 dimensions.

No ha de faltar, com a cloenda o ampliació de l'activitat, unes quantes preguntes i de les bones, i si falten, caldrà inspirar-les pel joc que donen: i si la piràmide té base triangular o qualsevol altre polígon? La fórmula també funciona? La descomposició del prisma en piràmides iguals és la mateixa?<sup>19</sup>

De vegades, el domini d'origen pot ser un problema anàleg més senzill del qual no se'n sap la solució. Posats en aquesta darrera tessitura, la resolució del problema d'origen ens possibilitarà la solució del problema de destinació. És un dels principis clàssics de la resolució de problemes (Pólya, 1945): si no saps com resoldre un problema, busquen un de semblant però més senzill. Potser la solució t'inspirarà l'estratègia per resoldre el primer. En el camp de les matemàtiques trobem analogies a dojo: figures semblants, proporcionalitat, equivalència de fraccions, equivalència d'equacions, etc.

La història de la ciència ens proporciona analogies genials que van permetre usar coneixements consolidats en un camp determinat per avançar i explorar-ne de nous. Per citar un exemple icònic dels inicis de l'electricitat (Einstein i Infeld, 1938), per diferenciar entre potencial elèctric i càrrega elèctrica els físics es van basar en una analogia el domini d'origen de la qual fou la diferència entre temperatura i quantitat de calor, respectivament. No obstant això, els fracassos estrepitosos de l'analogia (Hesse, 1966)

també abunden en la història de la física; per exemple la famosa analogia entre [ones d'aigua / partícules d'aigua] amb [ones de so / partícules d'aire] amb [ones de llum / partícules d'èter] que postulava l'existència de l'èter, una substància hipotètica que omplia tot l'espai conegut i que explicava els fenòmens elèctrics, magnètics i lluminosos.

Però no tota analogia és maniquea, o bona o dolenta, n'hi ha un munt que són provisionals i transitòries, i que fan el fet malgrat que se sàpiga que la realitat que aborden és més complexa. Per exemple, l'analogia entre el model atòmic de Bohr (1913) i el sistema solar.

Els raonaments per analogia, tot i que són d'una gran potència epistemològica, estan subjectes a biaixos cognitius de tota mena. Deu de ser per això que, grans i petits, tenim una ment reflexiva capaç d'avaluar-los.

## Apunt sobre lògica i llenguatge natural

Els manuals de sintaxi distingeixen entre l'oració i la proposició que conté, una distinció que és clau per entendre les relacions entre la lògica clàssica i llenguatge natural. La sintaxi defineix l'oració com la unitat mínima de comunicació que és sintàcticament autònoma, i hauríem d'afegir que ha de tenir sentit. El sentit lògic que ens interessa aquí seria la proposició, és a dir, un judici que té valor de veritat o de falsedat.

Una característica essencial del llenguatge natural, derivada de la rica combinatòria gramatical que generen les regles sintàctiques, és que fa possible que una mateixa proposició lògica pugui expressar-se en oracions diferents. Així, per exemple, les dues oracions següents (O1 i O2) no tenen la mateixa estructura sintàctica però contenen la mateixa proposició lògica (p):

- O1: L'aire està format per molècules que es mouen sense parar (p)
- O2: Les molècules de l'aire no s'estan quietes (p)

Aquesta flexibilitat lingüística cal tenir-la molt present quan s'analitzen els textos de l'alumnat. Com veurem més endavant, una bona part dels errors d'aprenentatge es manifesta en les produccions lingüístiques que no acaben d'expressar una proposició lògica.

Els llenguatges naturals tenen regles sintàctiques per encadenar i compondre oracions més complexes (coordinades, subordinades, etc.), que fan a partir d'un gran repertori de nexes (conjuncions, locucions adverbials, pronoms, etc.). Però la lògica proposicional és més restrictiva i només en té cinc, d'aquests nexes o connectors, la semàntica dels quals és molt estricta i ve definida per les taules de veritat falsedat.<sup>20</sup> Aquesta restricció també es trasllada a les produccions lingüístiques que expressen raonaments més complexos, en què intervenen més de dues proposicions.

## Heurístiques del raonament deductiu

Tal vegada la implicació i la substitució són les dues operacions lògiques més comunes i més practicades en els raonaments lògics de caire deductiu que es produeixen en els aprenentatges que són objecte d'aquest assaig. Són dos conceptes que també trobareu en el corpus de la lògica clàssica.

Des d'una perspectiva cognitiva, una implicació és una classe d'associació entre idees molt particular. Primer cal aprofundir en el concepte lògic i lingüístic per tal de



poder abordar posteriorment com opera la seva heurística. Una ullada al diccionari sempre va bé per aproximar-nos al núvol semàntic d'una paraula. En el cas de la implicació em centro en les accepcions relacionades amb la lògica i el raonament:

- **Implicació:** acció d'implicar. Relació lògica entre dues proposicions, una de les quals implica l'altra.
- **Implicar:** contenir com a conseqüència, com a inferència natural. Contenir implícitament, virtualment.
- **Implícit:** que s'entén inclòs sense ésser expressat formalment.

En primer lloc, cal fixar-se en l'ordre que estableix la relació d'implicació, és a dir, en què hi ha un antecedent (p) i un conseqüent (q). En el món físic, la implicació és equivalent a la relació de causa-efecte, de manera que serà una part imprescindible de qualsevol explicació científica. En el camp de la lògica proposicional, la implicació ( $p \rightarrow q$ ) és una de les cinc connectives admeses entre dues proposicions i la seva semàntica ve definida per la seva taula de veritat-falsedat, que no sempre és fàcil d'entendre per qui s'introdueix per primera vegada en la lògica formal.<sup>21</sup>

En segon lloc, fixeu-vos que el verb **contenir** i l'adverbi **implícitament** ens diuen que el conseqüent està inclòs en l'antecedent, però ho està sense una evidència clara i concreta. És com si el conseqüent s'amagués dins l'antecedent, per això diem que hi està de manera **implícita**. Aquesta és, tal vegada, la singularitat cognitiva més rellevant d'aquesta mena d'associació d'idees que coneixem com la implicació, i és on cal situar l'acció d'una heurística específica, que té la funció de **desvetllar** el conseqüent tot presentant-lo a la consciència. Tanmateix, també és factible que el terme conegut sigui el conseqüent, de manera que l'heurística haurà de desvetllar l'antecedent, és a dir, que cal eixamplar la definició inicial i assumir la recíproca: el conseqüent també està contingut, de manera implícita, en l'antecedent. En resum, l'heurística de la implicació pot actuar en dos sentits:

$$p \rightarrow ? \quad ? \rightarrow q$$

Com que la finalitat d'aquesta heurística és evidenciar el que no es percep de manera explícita i directa (?) en el context on posem l'atenció (el problema), per força s'ha de centrar en algun element explícit (p o q) del context, és a dir, que es percep o es manifesta de manera directa, del qual s'ha d'extreure, mitjançant una deducció, l'element implícit. L'heurística de la implicació actua com una mena d'escàner que contínuament examina els elements del context i processa què s'hi pot deduir, i quan en dedueix alguna cosa, estableix el nexce de la implicació. Vegem-ne un exemple:

#### **El problema dels recipients** (figura 3.8)

Com us ho fareu per portar 6 litres d'aigua d'un riu si només teniu un recipient de 9 litres (R9) i un altre de 4 litres (R4).

No em detindrè amb el detall de la pluja d'idees per analitzar el fenomen i redactar l'explicació que exposo tot seguit (sense especificar els símbols de les proposicions). Fixeu-vos en l'ordenació lògica de la cadena d'implicacions de l'explicació.

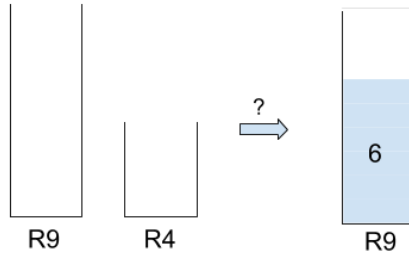


Figura 3. 8

Centreu l'atenció en el recipient R9, que conté 6 litres. L'heurística (H1) fa evident que se n'han tret 3. Evidencia un coneixement que no està explicat en l'enunciat del problema. Hem deduït 3 de 6 i 9, que són evidències explícites.

Si R9 té 6 litres (p), és que se n'han tret 3 (q)  $p \rightarrow q$

A partir d'aquest moment, els 3 litres formen part de l'enunciat del problema. Una nova heurística (H2) salta ara:  $q \rightarrow ?$

Si se n'han tret 3 d'R9 (q), és perquè s'han pogut abocar-ne 3 a R4 (r)  $q \rightarrow r$

Que s'encadena amb aquesta altra (H3):  $r \rightarrow ?$

Si s'han abocat 3 litres a R4 (r), és perquè hi havia 1 litre a R4 (s)  $r \rightarrow s$

Una nova heurística, que podríem anomenar l'heurística de la implicació transitiva, estableix una nova implicació entre la primera i la tercera, de manera que:

Si falten 3 litres en R9 és perquè n'hi havia 1 a R4.  $p \rightarrow s$

La qual cosa ens porta a formular un subobjectiu del problema: com ho hem de fer per tenir 1 litre a R4 si només disposem d'R9 i R4? Una heurística de l'exploració senzilla per esbrinar quines operacions aritmètiques entre 4 i 9 ens donen 1 resol el problema:  $9 - (4 + 4) = 1$ .

Cal observar que els subobjectius estan continguts en l'enunciat del problema de manera implícita, i es formulen com a conseqüència d'una implicació reeixida.

Ens centrem en les cadenes d'implicacions, un fet força freqüent en les explicacions científiques ja que ordena la lògica de l'explicació en connectar la proposició que descriu l'observació del fenomen i que es pretén explicar amb les lleis físiques que hi intervenen. Aquesta ordenació és la relació causa-efecte, que és una altra expressió de la implicació.

Un experiment a l'abast de tothom ens ho mostra:

Una manifestació de la pressió atmosfèrica (figura 3.9)

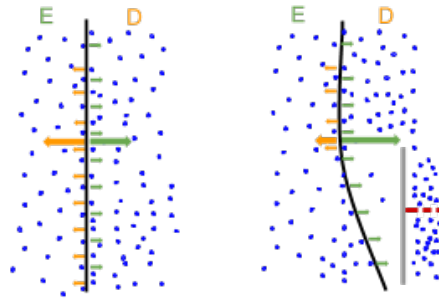


Figura 3.9

Pengeu un full de paper de tal manera que quedi vertical. Poseu una tapa rígida (una llibreta farà el fet) arran del paper per la banda dreta, paral·lela però sense tocar-lo. Feu un moviment bruscat de la tapa cap a la dreta. El paper es doblegarà cap a la dreta.

Abans de fer aquest moviment, demaneu a la classe que anticipin què passarà. Més d'un se sorprendrà perquè no s'esperava aquest efecte de la pressió atmosfèrica.

Quan la tapa es mou cap a la dreta (s), arrossega les molècules (t) i es crea un buit momentani en aquesta banda del full (u). Per un moment, les molècules no xoquen sobre la banda dreta del full (v), però les de l'esquerra sí (w) i empenyen el paper cap a la dreta (x).

$$\begin{array}{l}
 s \rightarrow t \\
 t \rightarrow u \\
 u \rightarrow v \wedge w \\
 v \rightarrow w \wedge x \\
 \hline
 s \rightarrow x
 \end{array}$$

De nou l'heurística de la transitivitat encadena diverses implicacions elementals i en determina l'ordre de l'explicació.

## Heurístiques de la substitució

La substitució és una de les heurístiques més freqüent en els raonaments deductius. No podem imaginar una àlgebra sense poder fer substitucions. Des del punt de vista de la lògica clàssica, la substitució deriva de la primera llei de la teoria de la identitat, definida per primera vegada pel filòsof alemany Leibniz (1646-1716), la formulació de la qual (Tarski, 1941) pot semblar trivial a primera vista:

$$x = y \text{ si, i sols si, tenen totes les propietats en comú.}$$

Aquesta llei pot interpretar-se també com la definició del símbol =. Aquesta interpretació és clau per comprendre l'**equivalència** entre expressions algebraiques en les deduccions algebraiques i la resolució d'equacions. A més, queda molt lluny del sentit inadequat que sovint se li dona a aquest símbol com a 'resultat' d'una operació.

Per una altra banda, no se'ns pot escapar una altra interpretació del principi d'identitat. Si dos objectes són idèntics perquè tenen les mateixes propietats, això suposa que entre aquestes propietats hi ha una **analogia** molt forta, si no, no podria establir-se una relació d'identitat.

En més d'una ocasió ja s'ha diferenciat el punt de vista formal del natural i se n'ha explicat la diferència, de manera que la descripció de l'heurística de la substitució seria més o menys així:

**Sigui  $x$  un objecte que intervé en un procés  $P$ . Sigui  $y$  un objecte que pot intervenir o no en  $P$ . Si s'estableix que  $x = y$ , aleshores es pot substituir  $y$  per  $x$  sense alterar el resultat de  $P$ .**

Aquesta definició de l'heurística de la substitució ens obre el camp d'aplicació i no el limita exclusivament a operacions matemàtiques. Vegem-ne un parell de casos:

#### Suma de fraccions (figura 3.10)

Donem per fet que els alumnes ja saben generar fraccions equivalents i sumar les que tenen el mateix denominador. Suposeu que es troben amb el problema següent, i, per primera vegada, amb la suma de fraccions de diferents denominadors:

Dos tractors amb potències diferents entren a llaurar un camp. En una hora un tractor llaura  $1/3$  del camp i l'altre,  $1/4$ . Quina part del camp han llaurat entre els dos?

Si els nois i les noies tenen present l'equivalència de fraccions és probable que es dispari l'heurística de la substitució, que pot formular-se d'aquesta manera:

*Ves generant fraccions equivalents fins trobar-ne dues amb el mateix denominador, substitueix-les i llavors podràs sumar-les.*

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = ? \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{5}{15} \\ \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} \end{array} \right\} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$$

Figura 3.10

Si abans he cridat l'atenció sobre el fet que una identitat és una analogia completa, en l'exemple que s'acaba d'exposar es fa palesa la potència epistemològica de l'analogia. La generació de fraccions equivalents és una heurística de l'analogia, i com que la substitució de les fraccions inicials per unes altres d'equivalents amb el mateix denominador es basa en una identitat que, a la vegada, és una analogia, hi ha la temptació d'equiparar l'heurística de la substitució amb la de l'analogia. La diferència entre l'una i l'altra ha de quedar clara. El que fa l'heurística de l'analogia és resoldre una analogia que no està completa, mentre que l'heurística de la substitució el que fa és usar-la, ja que l'analogia en què es basa la igualtat ja està ben resolta, si no, no podria actuar.

Recordeu que les heurístiques són regles o pautes per a l'acció sempre concretes, i com a tals ni es justifiquen ni poden contenir la seva demostració. És per aquesta raó que quan demanem a l'alumnat que expliqui per què han triat les operacions que han

triat, sovint no saben què dir o ho justifiquen repetint el que acaben de fer, tant si és el cas d'una heurística reeixida com si no. Que s'hagi fet una deducció no pressuposa que se la sàpiga argumentar, i molt menys que se la sàpiga validar lògicament.

L'exemple següent de l'heurística de la substitució el prenem del camp tecnològic.

#### Politges o engranatges? (figura 3.11)

Durant la construcció de projectes de mecànica és freqüent trobar-se amb el dilema d'haver de decidir entre l'ús d'engranatges o de politges per efectuar una determinada transmissió del moviment. L'analogia entre ambdós sistemes de transmissió salta a la vista. De vegades, sobretot si hem de reparar una màquina, es pot substituir una peça per una altra d'igual o per una altra d'equivalent que faci la mateixa funció. El que farà l'heurística de la substitució és presentar l'alternativa.

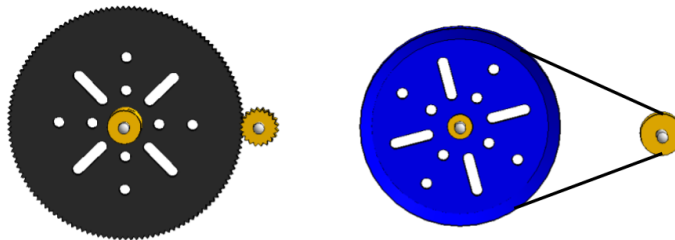


Figura 3.11

## Heurístiques del raonament inductiu

El raonament inductiu opera sobre premisses derivades d'una experimentació, cosa que marca una diferència fonamental amb el raonament deductiu. A partir d'un conjunt de dades del fenomen observat conjectura si hi ha una relació entre elles, de manera que tal conjectura s'ha de provar d'alguna manera. Per això es diu que és un raonament que passa del particular al general, a diferència de la deducció, que opera al revés. Una de les característiques de la inducció és que permet anticipar noves observacions i fer prediccions, un atribut molt important en el camp científic. Tot i això, des de fa segles hi ha un debat filosòfic obert respecte a la seva solidesa lògica.

Com que d'entrada l'he circumscrit a l'experimentació, he de matisar que també s'experimenta amb nombres i altres entitats de caire matemàtic. Cal esmentar que la demostració per inducció<sup>22</sup> és un mètode rigorós per provar conjectures, molt usat en les successions numèriques.

Així, doncs, bàsicament es tracta de perfilar les heurístiques per elaborar i avaluar conjectures sobre conjunts de dades. L'exemple següent ens ho mostra.

#### Investigar l'acceleració

La simulació de mòbils és un bon recurs didàctic per explorar i descobrir les lleis físiques del moviment. Ja he exposat com funcionen les heurístiques de l'exploració i els descobriments que sovint propicien. Com que el raonament per inducció necessita de tot un seguit de casos per extreure'n una conclusió, si programem un mòbil amb una acceleració determinada i en capturem les dades que genera (la posició, el temps, la velocitat per unitat de temps trans-

correguda, l'espai recorregut en cada unitat de temps i l'espai acumulat en cada moment), aquestes dades ens facilitaràn tot un seguit de casos amb què inferir alguna coneixement sobre el moviment uniformement accelerat.

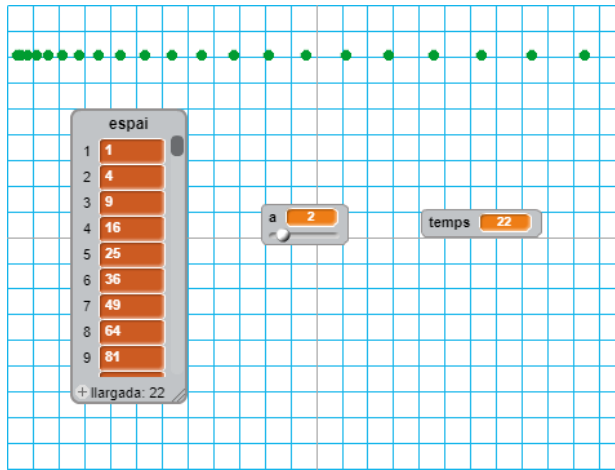


Figura 3.12

La figura 3.12 és un escenari programat amb Scratch. Els punts verds indiquen la posició d'un mòbil accelerat de manera constant i la taula de sota, l'espai que va recorrent des de l'inici. No cal dir que la programació l'han de fer els alumnes, en el ben entès que abans han d'haver programat mòbils amb velocitat constant i han d'haver definit bé què és l'acceleració.

Haver programat aquesta simulació facilita molt plantejar les lleis bàsiques del moviment com a problemes que cal resoldre. Per exemple:

Esbrineu quins càlculs caldria fer per saber l'espai que recorre un mòbil amb una acceleració constant de  $2 \text{ m/s}^2$  al cap de 5 segons. I al cap d'1 hora? (No disposeu de l'ordinador, només paper i llapis).

La primera resposta consistirà a elaborar la taula de l'acceleració dels 5 primers segons:

	<i>Temps</i>	$v_i$	$v_f$	$v_m$	$e_i$	$e_t$	$a \ ? \ t = e$
$a = 2 \text{ m/s}^2$	0-1	0	2	1	1	1	$(2 \ ? \ 1 = 1)$
	1-2	2	4	3	3	4	$(2 \ ? \ 2 = 4)$
	2-3	4	6	5	5	9	$(2 \ ? \ 3 = 9)$
	3-4	6	8	7	7	16	$(2 \ ? \ 4 = 16)$
	4-5	8	10	9	9	25	$(2 \ ? \ 5 = 25)$
	5-6	10	12	11	11	36	$(2 \ ? \ 6 = 36)$
	6-7	12	14	13	13	49	$(2 \ ? \ 7 = 49)$

Però confeccionar la taula dels 3.600 segons ja són figures d'un altre paner. Així es planteja el veritable problema: es tracta d'induir alguna relació entre  $a$ ,  $t$  i  $e$  que es compleixi en cadascuna de les ternes de la columna ( $a \ ? \ t = e$ ) de la taula. En aquest punt és on opera

l'heurística del raonament inductiu. I opera a còpia d'elaborar una conjectura amb poques ternes i contrastar-la amb la resta, per tal de veure si es pot generalitzar.

A diferència d'altres acceleracions, la que he triat ( $2 \text{ m/s}^2$ ) facilita una conjectura ràpida. S'observa que la sèrie numèrica dels espais és la dels quadrats dels temps, així que la primera conjectura és  $e = t^2$ .

Però una avaluació ràpida de la conjectura fa veure la mancança de l'acceleració en la fórmula. Tot i això, molts nois i noies la donaran per bona; és el moment de confirmar la conjectura amb unes altres acceleracions i fer veure l'error de la primera conjectura. És una experiència interessant treballar una acceleració diferent per cada grup, per acabar comprovant que la sèrie dels quadrats funciona sempre que es multipliqui per la meitat de l'acceleració.

Per descomptat que no és l'únic mètode per obtenir la relació  $e = 1/2a \cdot t^2$ . Cal esmentar-ho perquè a través de la representació gràfica de la velocitat i del temps també es pot arribar a la mateixa conclusió. I, certament, és molt bonic i il·lustratiu treballar-ho a continuació perquè hi intervenen diferents heurístiques.<sup>23</sup>

## Posem fil a l'agulla: les heurístiques del prototip

Fins a quin punt els artefactes i els sistemes tecnològics que manegem actualment són la resposta evolutiva a les necessitats humanes és una reflexió que no tractaré aquí, per bé que cal tenir-la molt present per a l'educació del pensament crític. El que interessa ara és que qualsevol dispositiu tecnològic és una solució a un problema concret. De manera que **veure o copsar** el problema que resol és primordial per comprendre'l.

Posem per cas que treballem els circuits elèctrics a classe. Paga la pena plantejar el problema que resol. Per exemple: en un dormitori acostumen a haver-hi almenys dos dispositius per controlar el llum del sostre, un a l'entrada i un altre a la capçalera del llit.

Quan entrem a l'habitació, encenem el llum des de l'entrada i l'apaguem del llit estant. Si només hi hagués un sol dispositiu per controlar el llum, a l'entrada o a la capçalera del llit, o bé entràriem a les fosques al dormitori o bé ens hauríem de llevar per apagar el llum quan estiguéssim al llit.

El problema que planteja aquesta situació consisteix a dissenyar i construir el dispositiu elèctric que permet obrir i tancar un llum des de dos llocs diferents, si, com és el cas, els nois i les noies (que són d'ESO) no coneixen el commutador unipolar.

Sovint, la primera heurística que se'ls acudeix és posar dos interruptors en el circuit i, tot seguit, comproven que és impossible assolir l'objectiu. De seguida s'adonaran que cal pensar un nou dispositiu. Un plantejament didàctic eficient és proporcionar-los una bona analogia, per exemple, comparar el dispositiu que se cerca amb una estació d'una línia de tren d'una sola via, que es bifurca a l'entrada i a la sortida de l'estació perquè hi puguin circular dues locomotores a la vegada. Amb clips i amb xinxetes es pot construir un prototip que ajudarà a comprendre el funcionament d'un commutador simple.

En tant que una solució tecnològica és un problema resolt és plausible pensar que el procés de creació d'un giny tecnològic arrenca amb alguna mena d'heurística. Ens hi referirem com les heurístiques del prototip. Bàsicament tenen aquestes característiques:

- Responen a un problema «tecnològic», és a dir, que la solució es pot materialitzar.
- Com totes les heurístiques mobilitzen idees i coneixements, tant d'objectes materials com simbòlics.
- S'integren en un únic sistema, que **les relaciona i les ordena** en un prototip, que és la resposta al problema.

Així, doncs, les heurístiques del prototip són temptatives cognitives que, en lloc de proposar una pauta o una regla d'acció com altres heurístiques, conceben una solució tot proposant un prototip, que pot expressar-se mitjançant una representació esquemàtica factible de concretar-se en un model material o simplement quedant a la memòria personal com a idea. Evidentment, com qualsevol altra heurística, les del prototipatge no són infal·libles i poden contenir errors i biaixos cognitius que, una vegada manifestats, engegaran un procés d'assaig i error. Recordeu que els errors poden romandre en estat latent, però tard o d'hora es manifesten.

Vegem-ne un cas de l'heurística del prototip relacionat amb l'exemple anterior.

**Problema: dissenyar un dispositiu que inverteixi el sentit de gir d'un motor elèctric de corrent continu**

Es parteix del següent:

- Se sap muntar un circuit elèctric bàsic format per motor, interruptor i pila.
- Se sap que el corrent elèctric continu surt del pol positiu de la pila, corre pel circuit i torna al pol negatiu de la pila. El sentit del corrent elèctric continu no sempre es manifesta de manera evident. Per exemple, amb una bombeta no es pot detectar, amb un LED sí, i també amb un motor.
- S'observa experimentalment que hi ha dues maneres d'invertir manualment el sentit de gir del motor: o bé es capgira la pila o bé es creuen els dos fils que es connecten al motor.

Cadascuna d'aquestes dues accions manuals és un punt de partida que inspira una determinada heurística del prototip. Si capgirem la pila, el prototip que se'n derivarà serà el commutador unipolar simple; i si es creuen els cables, en sortirà el commutador bipolar d'encreuament. Aquí s'opta per la primera acció, perquè la resolució mecànica del prototip és més senzilla.

La via cognitiva per induir aquesta heurística comença amb la representació i construcció del circuit de la figura 3.13 A. Com que capgirarem la pila per canviar el sentit de gir del motor, podem representar aquesta acció superposant un altre circuit igual però amb la nova posició de la pila, que es marca amb línia discontinua a la figura 3.13 B.

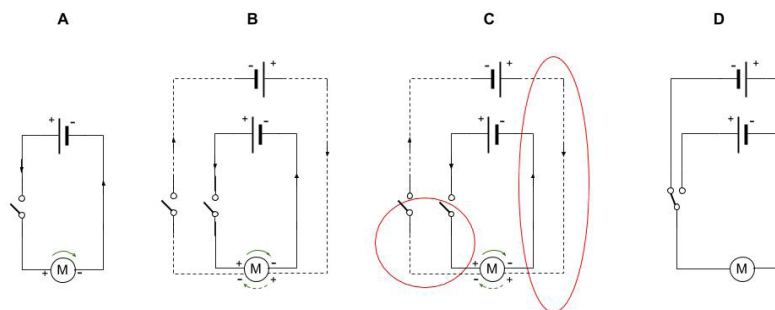


Figura 3.13



Examinem què tenim. Per una banda, hi ha dos circuits connectats al mateix motor, i, si els dos interruptors es tanquen alhora, es produirà un curtcircuit. Això vol dir que quan un interruptor es tanca, l'altra cal tenir-lo obert. Per altra banda, sempre ens interessa que un circuit tingui el mínim de fils i interruptors possible.

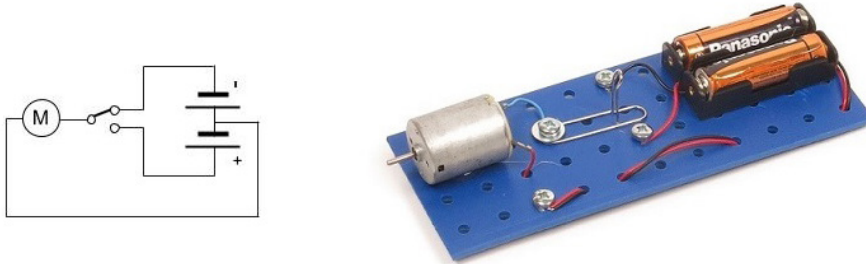


Figura 3.14

Això últim dispara una heurística que «fusiona cables i interruptors» i els integra en un dispositiu i un circuit més simple, una acció cognitiva que es representa a la figura 3.13 C. El resultat (figura 3.13 D) és un nou dispositiu (nou per a qui l'acaba de descobrir) i un circuit amb dues piles connectades en sèrie d'entre les quals surt un cable cap al motor. Cada posició del commutador farà treballar una sola pila.

La figura 3.14 representa el circuit de commutació del motor i la realització del commutador a base de clips i xinxetes.

Del clip es passarà fàcilment al commutador de palanca. De manera anàloga es poden concebre heurístiques específiques per idear i comprendre altres dispositius. En la mesura que l'alumnat coneix amb un cert nivell de profunditat un repertori mínim de dispositius tecnològics, estarà preparat per entomar reptes cada vegada més complexos, per exemple, com mostra la figura 3.15 A, la construcció d'un vehicle elèctric amb mecanisme de direcció de gir i marxa endavant i endarrere, per bé que aquí caldrà entendre com funciona i què fa un potenciòmetre. És un pas previ a construir el mateix vehicle però amb comandament a distància, tal com mostra la figura 3.15 B, un exemple pràctic de la placa Micro:bit.<sup>24</sup>

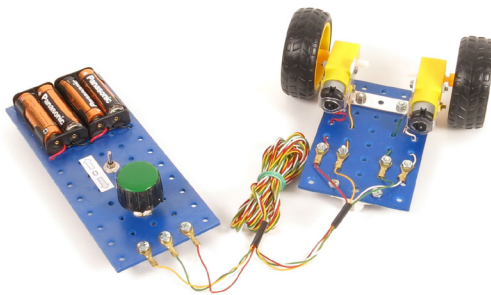


Figura 3.15 A

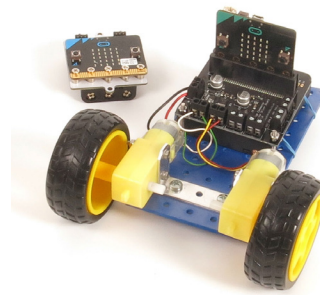


Figura 3.15 B

En els darrers anys estem assistint a una eclosió de la robòtica escolar i a una extensió sense precedents de l'anomenada cultura *maker* (cultura del fem-ho) a les aules que empodera l'alumnat a pensar i a fer tota mena de projectes tecnològics. Estimular, inspirar l'alumnat i facilitar-los la producció d'heurístiques del prototipatge per tal d'engargar processos d'aprenentatge per assaig i error ja és una necessitat pedagògica.

## La heurística del tot s'hi val

Totes les heurístiques exposades fins ara tenen, almenys, uns quants casos que les justifiquen, és a dir, que hi ha alguns coneixements, ni que sigui fragments, que se'n poden derivar. Per descomptat que no pretenc exhaurir ni limitar el camp d'acció de la ment autònoma respecte als coneixements STEAM. Segur que el llistat heurístic s'eixamplaria amb un camp més ampli de coneixements dels que he manejat. Però això, en tot cas, ara és una conjectura.

Per una altra banda, pot haver-hi coneixements en què intervinguin simultàniament més d'una heurística per formar-los, de manera que és raonable pensar en heurístiques compostes o complexes. És un camp obert per investigar.

Com que és un camp d'investigació cognitiva que té molt recorregut, tot això que acabo de dir ja es veurà. No obstant això, si mentre es confegeix una determinada via cognitiva per arribar a un determinat coneixement, ensopeguem amb el que sembla ser una nova heurística, val més no desestimar-la, tot i que no s'encabeixi en el catàleg d'heurístiques que he presentat.

L'he anomenada l'heurística del tot s'hi val perquè és la frase emblemàtica de la filosofia de l'anarquisme epistemològic (Feyerabend, 1970) que defensa la inexistència de regles metodològiques universals en la producció del coneixement científic. Paga la pena tenir una heurística-comodí per als casos en què les altres no funcionen.

## Les heurístiques errònies

No voldria acabar aquest capítol donant la falsa impressió que presento només les excel·lències de les heurístiques. Ja he esmentat en diverses ocasions que les heurístiques també poden ser errònies. Tal vegada hauria d'haver exposat una heurística errònia per a cada cas, però si ho hagués fet el rigor m'hauria obligat a presentar un marc teòric sobre els errors, i a explicar què són els biaixos cognitius i com intervenen en les heurístiques errònies, cosa que desenvoluparé en el capítol següent. De manera que no faig més que seguir el pla de l'assaig. En el marc de l'aprenentatge per assaig i error, que és el pinyol d'aquest assaig, el capítol que acaba està dedicat a l'assaig, i, el següent, a l'error, de manera que entre l'un i l'altre podré bastir el marc conceptual sobre l'aprenentatge escolar per assaig i error.

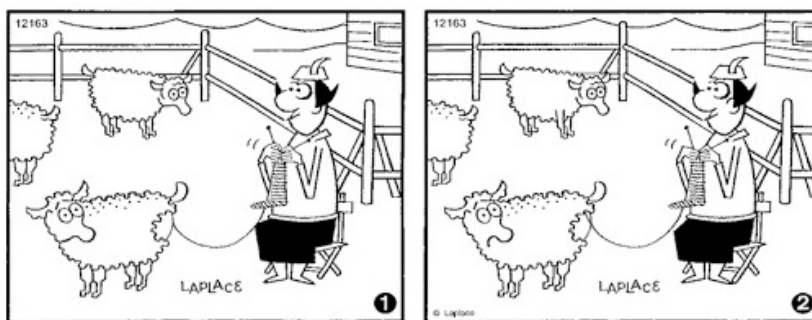
# 4

## Genis fal·libles

### Explorant errors

*Per bé o per mal, l'error és el nostre company de per vida.  
Així doncs, sens dubte ja és hora de conèixer-lo.*

Kathryn Schulz



*La vida és un dibuix amb tants errors, que, talment el ninot en el paper, hem de treure'ns l'engany amb bon enginy.*

Joan Brossa (1919-1989), «Sextina a Jean Laplace»

Llegiu l'enunciat següent i procureu contestar en pocs segons:

Una llibreta i un bolígraf costen 1,10 €. La llibreta costa 1 € més que el bolígraf. Quant costa el bolígraf?

El bolígraf costa 10 ct. És probable que aquesta sigui la primera resposta que us hagi vingut al cap, i segurament ara mateix desconfieu, i tal vegada sospitareu que té trampa i prendreu consciència que us cal comprovar si els 10 cèntims són, efectivament, la resposta correcta.

Potser heu donat per bona la vostra intuïció, de manera que, després de llegir aquestes darreres línies, ara dubteu i la confusió us balla pel cap. També, naturalment, si sou professor de matemàtiques o teniu experiència en aquesta mena de problemes, haureu esbrinat, però no a tanta velocitat com heu pensat en els 10 ct., que el proble-

ma es resol entenent bé l'enunciat i fent un senzill càlcul. Llavors calculareu<sup>25</sup> que el bolígraf costa 5 ct.

El problema no té trampa, però es persuasiu i convida a l'equívoc. A més de ser un problema típic per introduir el llenguatge algebraic, també és un dels tres ítems del test de reflexió cognitiva<sup>26</sup> (Shane, 2005). S'ha testat en milers d'estudiants universitaris i sempre amb resultats sorprenents: aproximadament la meitat responen, erròniament, que la llibreta costa 10 ct.

És un bon problema per exercitar l'anàlisi algebraica d'enunciats i les equacions de primer grau. Però el meu objectiu no era pas aquest, sinó comprovar fins a quin punt confiaven cegament en la seva intuïció, és a dir, que no avaluaven si la seva resposta era coherent amb l'enunciat.

El vaig passar a 23 alumnes no una sola vegada, sinó tres; però donant pistes en la segona i tercera temptatives.<sup>27</sup>

## Comprendre els errors: descriure les heurístiques errònies

Si es vol comprendre un error cal partir de dos principis. El primer consisteix a considerar un error com una heurística. El segon consisteix a establir una frontera metodològica entre la descripció de l'heurística errònia i l'explicació de les possibles causes que la produeixen, per bé que aquestes no sempre és possible evidenciar-les amb claredat. Les causes pertanyen al domini subjectiu, és a dir, al procés cognitiu del subjecte, mentre que la manifestació de l'heurística errònia pertany al domini objectiu, és a dir, a tot allò que una observació rigorosa pot descriure.

Quant a la descripció de l'error, com es palesarà tot seguit, cal dir que inclou no només les produccions observables dels alumnes (orals, escrites i representacions de tota mena), sinó també les inferències lògiques que se'n puguin derivar. La descripció d'un error pot contenir més elements que els expressats directament.

Comencem per l'error més freqüent del problema del bolígraf i de la llibreta.

Vet aquí l'error de l'alumne DLM, que és l'error majoritari:

2. Un bolígraf i una llibreta costen 1,10 €. La llibreta costa 1 € més que el bolígraf. Quant costa el bolígraf?

$$\begin{array}{r} 1,10 \\ - 1 \\ \hline 0,10 \end{array} \text{ costa el bolígraf}$$

Com saps que no t'has equivocat?

Per que si tot costa 1,10 i la llibret costa un euro més es té que resta 1,10€ menys 1€ i aleshores sabne quant costa el bolígraf.

Identifiquem un error perquè coneixem la «veritat». Un error es defineix en termes de veritat, però la veritat (en aquest cas, els 5 ct.) ni el descriu ni l'explica.

La descripció d'una heurística errònia s'inicia comparant-la amb l'estructura lògica del coneixement en joc. En el cas que ens ocupa, és l'estratègia de resolució del problema, tant si es fa pel compte de la vella com si es fa per la formalització algebraica. A partir d'aquí podem detallar amb precisió la descripció de l'error de DLM, que comença amb la lectura de l'enunciat que fa.


Adoneu-vos com eludeix o esquiva la dificultat comprensiva del fragment de l'enunciat: «La llibreta costa 1 € més que el bolígraf», i com el substitueix i opera amb un enunciat més simple: «La llibreta costa 1 €». Una vegada feta aquesta simplificació, tot eliminant l'oració subordinada comparativa «més que el bolígraf», **substitueix** l'enunciat original per un de més simple: «Una llibreta i un bolígraf costen 1,10 €. La llibreta costa 1 €. Quant costa el bolígraf?»

Però aquesta substitució no pot considerar-se la causa o l'explicació de l'error, sinó l'error mateix, és a dir, la seva descripció. En els propers apartats donarem una explicació cognitiva sobre les heurístiques errònies, de manera que entre la descripció i l'explicació de l'error obtindrem un valuós coneixement didàctic.

DLM, com molts altres alumnes, afronta la complexitat del problema reduint-la per simplificació, substituint l'enunciat inicial per un altre que li és més fàcil i ràpid de manejar, reduint la complexitat i l'esforç cognitiu que anticipa. Per què ho fa? No és per mandra. La bona pregunta és per què no avalua si la seva solució és la correcta? Per què ha donat per bona la primera idea que se li ha acudit? Són preguntes, repeteixo, que pertanyen a l'àmbit de l'explicació, que sobrepassen la descripció objectiva i ens remetent a un àmbit molt concret de la psicologia cognitiva.

Vegem un cas ben diferent de l'anterior, el de l'alumna NJD:

**2. Un bolígraf i una llibreta costen 1,10 €. La llibreta costa 1 € més que el bolígraf. Quant costa el bolígraf?**


  
 llibreta                      boli
   
 |
   
 + 1€ = 1,10 + 10 = 20    10 cent.

5 cent.

$$\begin{array}{r}
 + 1 \\
 \hline
 1,5
 \end{array}$$

**Com saps que no t'has equivocat?**

Creec que aquel problema no te solució.

Observeu que NJD fa dues heurístiques. La primera (a l'esquerra) conté l'error dels 10 ct. Però comprova que, sumant els 10 ct. del bolígraf més l'euro, el resultat no compleix la condició de l'enunciat, ja que li surt 1,20 €.

En la segona heurística (a la dreta, a dalt), troba la solució correcta, els 5 ct., la qual cosa prova que ha fet una lectura comprensiva de l'enunciat i que l'ha resolt. Però en comprovar la solució comet l'error de sumar dues unitats diferents, cèntims i euros (5 ct. + 1 €), la qual cosa l'impedeix provar que 5 ct. és la solució correcta. Com que no avalua el càlcul, i ja no disposa de més alternatives, conclou que el problema no té solució.

## Diversitat d'errors en un mateix aprenentatge

Un error sempre es refereix a un coneixement concret, però, en general, ni és únic ni és singular. Per al problema que ens ha ocupat fins ara, vet aquí un resum dels errors detectats en una sola classe i la seva freqüència, comptant que no tots els alumnes van fer la mateixa quantitat de temptatives:

Tipus d'errors (L: llibreta, B: bolígraf)									
10 ct.	20 ct.	Ignorar 0	No solució	2,10 (L+B)	1,5 €	2,10 €	1,10 € (L = 2,10)	1,10 €	10 ct. (L = 2 €)
21	7	7	1	1	1	1	1	1	1
Freqüències									

Sorprenen el resultats? No, si es coneix la finalitat del test i el que pretén evidenciar. Si recordeu el problema exposat en el primer capítol, el de la comptabilitat dels cubets empaquetats de forma ortoèdrica, en vaig documentar un total de vint-i-dos.

Si representem un coneixement concret per  $C$ , aquest sempre tindrà un conjunt d'errors ( $e_i$ ) associats, que representem per  $E(C)$ .

$$E(C) = \{ e_1, \dots, e_n \}$$

M'agrada pensar que aquí es troba el nucli de la diversitat cognitiva, que cal diferenciar-la de la cultural i la social. És obvi que aquest conjunt varia en funció de la quantitat d'alumnes que aprenen un coneixement determinat. O no. Tal vegada si es passa una mateixa prova a una gran població escolar hi hagi un límit a la diversitat d'errors. No ho sé.

L'abundància d'errors pressuposa que qualsevol didàctica relativa a un aprenentatge ha de ser oberta per força. De fet, es comença amb un model simple i a mesura que els nois i les noies van produint errors, i aquests errors s'identifiquen, es descriuen i s'expliquen, es pot ensenyar l'alumnat com els poden depurar per obtenir-ne coneixement, de manera que el model didàctic va adquirint expertesa i complexitat, a la vegada que nois i noies aprenen millor.

És així com una didàctica cristal·litza i es fa més nítida i eficient. La repetició amb variacions d'un aprenentatge concret fa adquirir expertesa i competència, tant al professorat com a l'alumnat. I gosaria dir que és tant una necessitat professional com una condició necessària per a un aprenentatge profund. Forma part de l'ADN de l'ofici de mestre. No cal insistir en què documentar i investigar errors d'aprenentatge és un recurs valuós tant per al professorat experimentat com per al novell (Achón, 1984; Ashlock, 1990; Astolfi, 1997; Bachelard, 1938; Baruk, 1985; CIEAEM, 1987; IREM, 1980; Kerr, 2013; Rico, 1995; Spangler, 2010, 2011; De la Torre, 1993; Sanmartí, 2007; Vallverdú i Izquierdo, 2010).

## Baixos cognitius

Mireu la fotografia del Gateway Arch de Saint Louis, a l'estat de Missouri (figura 4.1). Fa 192 m de base i 192 m d'altura. **Costa de creure que l'altura i l'amplada siguin**

**iguals, oi?** És la il·lusió òptica més gran construïda per l'home, i per molt que ens hi esforcem, sempre veurem que és més alt que ample. Les il·lusions òptiques són uns dels exemples més evidents dels anomenats biaixos perceptius.

Amb aquesta introducció visual entrem al tema dels biaixos cognitius, que ja he apuntat en més d'una ocasió.

Un biaix cognitiu és un error inconscient i sistemàtic de la nostra ment, que altera les inferències racionals del procés cognitiu i influeix en el resultat. Ve a ser com una mena de curtcircuit o una drecera mental que s'activa de manera involuntària i espontània en la nostra ment, quan aquesta és citada a respondre amb urgència i amb poca informació a determinats requeriments de l'entorn. Recordeu el test de la llibreta i el bolígraf, la insistència amb què ens bombardejava la solució dels 10 ct.



Figura 4.1. Font: [https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:St\\_Louis\\_night\\_explend\\_cropped.jpg](https://es.m.wikipedia.org/wiki/Archivo:St_Louis_night_explend_cropped.jpg)

En tant que inconscients i involuntaris, els biaixos cognitius són inevitables, per bé que una ment reflexiva pot evitar els seus paranys però no pas que es produeixin. Des del punt de vista evolutiu i adaptatiu, quan una situació crítica requereix d'una resposta ràpida i la solució no demana molta precisió, alguns biaixos poden ser més eficients que una resposta racional, perquè aquesta sempre és més lenta.

Els biaixos cognitius són objecte d'estudi per part de les ciències cognitives i se n'han identificat un munt<sup>28</sup> (Kahneman, 2011), sempre en relació amb contextos o situacions amb perfils i característiques determinats; entre els biaixos hi ha les tradicionals i enganyoses fal·làcies lògiques.<sup>29</sup> Com a heurístiques errònies, els biaixos cognitius són els que tradicionalment han alimentat la mala fama de la intuïció entre els racionalistes que habiten exclusivament en els santuaris de la lògica.

## El biaix de la substitució per simplificació

En general som experts a simplificar i substituir una pregunta o una qüestió complicada per una altra de més simple. Però siguem justos amb aquest biaix cognitiu i no el desacreditem. El mateix Descartes, en la cinquena de les **Regles per a la direcció de l'enginy**, recomana que per «descobrir una veritat cal reduir gradualment les proposicions complexes i obscures a unes altres més simples». Si el filòsof aixequés el cap, se sorprendria que el més destre a simplificar no és precisament el geni maligne, sinó el seu company fal·lible i veloç, el geni intuïtiu.

Un cas clar de com opera aquest biaix cognitiu és l'heurística dels 10 ct., que acabo de comentar. Hi ha un munt de situacions d'aprenentatge en què els nois i les noies apliquen l'heurística de la substitució d'un enunciat complex per un de més senzill, sobretot si és la primera vegada que es troben davant d'una situació semblant a una de coneguda, però més complexa.

Un cas típic d'aquest biaix es produeix en l'aprenentatge de fraccions, quan és la primera vegada que afronten el problema de sumar fraccions amb diferent denominador. Per exemple:

$$\frac{2}{10} + \frac{3}{15} = \frac{5}{25}$$

L'heurística aplicada usa el coneixement de què es disposa (sumar fraccions del mateix denominador) i s'adapta a la situació (se sumen també els denominadors). És en aquests moments que cal induir un conflicte cognitiu per tal de fer-los prendre consciència que hi ha un error en la resolució del problema. Qualsevol professor de matemàtiques amb un mínim d'experiència sap que aquesta mena d'errors són freqüents. Des del punt de vista de l'alumnat, només exercitant un control cognitiu que avalui l'heurística aplicada és possible sortir-se'n, i això implica que s'ha de produir una presa de consciència de l'error.

### L'efecte *priming* i les àncores

La capacitat d'associació de la nostra memòria és impressionant i com més experiències cognitives té, més possibilitats té un estímul de connectar-se amb més elements de la inextricable i opaca xarxa de la memòria. Ja n'he parlat a bastament en el segon capítol.

La psicologia cognitiva ha descobert un factor present en moltes associacions d'idees de gran transcendència en la nostra vida quotidiana i responsable d'importants biaixos cognitius. Es tracta d'una prioritització inconscient en les associacions d'idees, coneguda com l'efecte *priming*.

Amb un test clàssic s'entendrà perfectament com opera l'efecte *priming*. A dos grups diferents de subjectes se'ls presenta la paraula següent i se'ls demana que la completin:

T I \_ T A

Però abans de mostrar-la, a un grup se li presenta de manera directa o indirecta el concepte de **família** a través d'un text o d'una imatge que l'evoqui, i amb el segon grup es fa el mateix procediment però amb el concepte **bolígraf**. La resposta majoritària del primer grup a l'ítem serà **tieta**, en canvi, la del segon grup serà **tinta**.

Està clar que un cas no fonamenta una teoria, però il·lustra per on va el concepte de l'efecte **priming**. La prioritització que pot provocar un estímul determinat en una posterior associació entre idees és un fenomen psicològic molt investigat i d'àmplies aplicacions, algunes de les quals, per exemple la publicitat, han generat un debat ètic.

Per al nostre cas ens interessa una variant de l'efecte **priming** conegut com l'efecte **àncora**. Vegem un exemple molt citat i relacionat amb l'aprenentatge del càlcul per estimació:



Es planteja a un grup d'alumnes de secundària que estimin en cinc segons el resultat d'aquest producte:  $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ . I a un altre grup, aquest:  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$ .

Ja podeu suposar encertadament que els alumnes del primer grup van fer estimacions superiors a les del segon grup. La propietat commutativa no funciona en l'àmbit cognitiu. L'estimació s'esbiaixa a l'alça o a la baixa segons la quantia dels primers factors.

Des del punt de vista didàctic, un ancoratge tant pot convertir-se en una palanca per assolir un objectiu cognitiu com en un llast, generant tota mena d'errors.

## L'àncora de Menó

Vet aquí un exemple clàssic d'ancoratge. És el problema de la duplicació del quadrat:<sup>30</sup> donat un quadrat qualsevol, dibuixeu-ne un altre amb el doble de superfície. La solució geomètrica es construeix sobre la diagonal del quadrat inicial (figura 4.2).

Pel que fa a aquest problema, paga la pena de llegir un preciós passatge dels **Diàlegs** de Plató, el Menó, en el qual Sòcrates planteja aquest problema a un minyó perquè trobi la solució per ell mateix, és a dir, sense que la hi ensenyi.

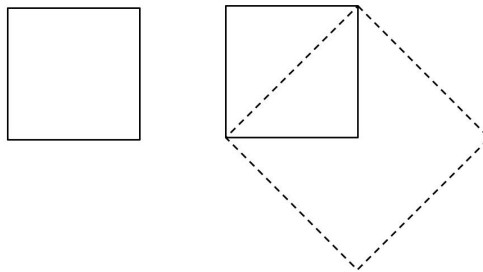


Figura 4.2

És un petit tresor de la maièutica socràtica o l'art de fer preguntes a algú perquè descobreixi la veritat per si mateix. A part d'admirar el magisteri de Sòcrates, sorprèn que l'error del minyó és molt freqüent, com tot seguit veurem, en les nostres aules del segle XXI. És el primer error d'aprenentatge documentat en tota la història de la pedagogia de les matemàtiques. Una prova més a favor de la realitat de l'efecte d'ancoratge.

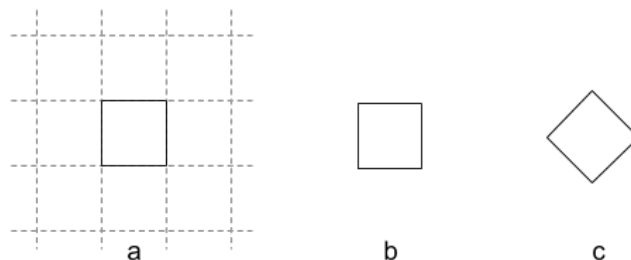


Figura 4.3

Com opera l'efecte àncora en aquest cas? Cal examinar el context geomètric en què plantegem el problema. La figura 4.3 ens mostra tres contextos diferents. El quadriculat del full (3a) és una àncora molt potent, ja que prioritza que les heurístiques de construcció geomètrica de la solució es facin seguint les rectes de la quadrícula. També ho és la posició del quadrat respecte dels marges del full de paper (b), ja que ambdós tenen els costats en paral·lel. També ho és la verticalitat i l'horitzontalitat del quadrat, que ancora les heurístiques de la mateixa manera que ho fa el quadriculat. No s'acostuma a presentar el quadrat inicial inclinat en relació amb els marges del full (3c). El professorat experimentat sap la importància didàctica de cuidar aquests detalls (Puig, 1956), però abans d'aprofundir-hi, examinem el conjunt d'errors associats a aquest coneixement (figura 4.4), que van sorgir a l'aula. Estan ordenats de major a menor freqüència. El quadrat inicial era de 2 x 2 quadres dibuixat sobre una quadrícula.

L'error 1 és el que fa el minyó del Menó. Vint-i-quatre segles més tard, aquest error persisteix a les aules, un argument més a favor que els ancoratges cognitius són una realitat.

Abans d'interpretar aquests errors, tingueu present que el fet que un ancoratge dispari una heurística no pressuposa que aquesta sigui errònia. Ho mostraré al final d'aquest apartat.

En els errors 1, 2 i 3 trobem el biaix de la substitució per simplificació. A 1 es doblen les longituds, es manté la forma quadrada i s'ignoren els quadrats de la superfície.

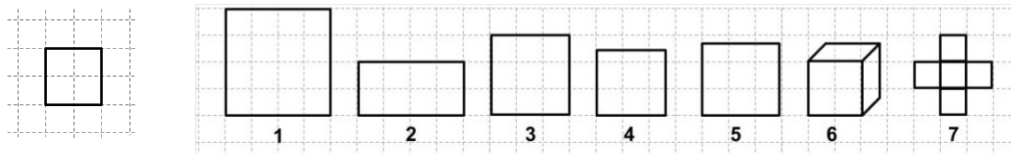


Figura 4.4

A 2 es duplica la superfície i s'ignora la forma. A 3 ja hi ha una avaluació precària, ja que se sap que la longitud del quadrat no pot ser el doble, però l'àncora del quadriculat es manté molt forta. A 4 i 5 ja trobem que s'ha avaluat si la solució respon als requeriments del problema, ja que es manté la forma quadrada i se sap que la longitud del costat ha d'estar entre dos i tres quadradets.

Quant als casos 6 i 7, l'heurística es dispara fora del problema i, segurament, deu de confondre la duplicació del quadrat amb fer un cub. Distingir entre confusió i error és important; una confusió pot ser clara de manera que l'error també ho serà, però també pot ser un embolic conceptual de manera que l'error no serà gens fàcil d'avaluar per part del subjecte. Ja ho deia Francis Bacon (1620), que la veritat sorgeix més ràpidament de l'error que de la confusió.

Tanmateix, l'efecte àncora no s'ha de veure només com un obstacle que cal superar, sinó que pot constituir una ajuda inestimable, ja que també podem ancorar el plantejament del problema per inspirar una heurística determinada.

Si no, mireu el mateix problema (figura 4.5), però amb una altra formulació que ancora la via cap a la solució.

Una piscina quadrada té un arbre plantat en cada cantonada (figura 4.5). Es vol duplicar la superfície de la piscina, però sense tallar els arbres, i mantenint la forma quadrada.

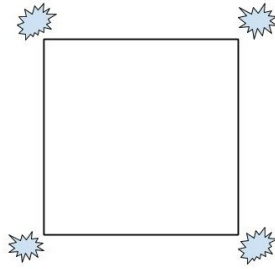


Figura 4.5

I ara és quan s'escau tornar enrere i retre comptes de l'**error memorable** exposat en el capítol anterior. Recordeu que es plantejava fabricar una capsa per ficar-hi els 60 cubets i que havia preguntat, amb la fotografia projectada de la capsa desplegada amb els cubets ben apilats a sobre, quants quadradets de paper caldria per confegir la capsa (cada quadradet de paper es corresponia a una cara del cubet). Recordeu que gairebé tota la classe va respondre a l'uníson i a la velocitat del llamp que la capsa també tindria 60 quadradets de superfície. La quantitat de quadradets de paper van ancorar-se en la quantitat de cubets del paquet que tothom coneixia.

### Àncores i obstacles epistemològics

Devem a Gaston Bachelard (1884-1962) el concepte d'**obstacle epistemològic**, que formulà a *La formation de l'esprit scientifique* (1938), una obra de referència per a tothom que s'interessi per l'epistemologia de la ciència i pels errors que es produeixen tant en l'ensenyança com en l'aprenentatge. Planteja que el progrés històric de la ciència s'ha d'entendre en termes d'obstacles. Posteriorment aquesta formulació influirà en l'anomenat racionalisme crític (Popper, 1972), corrent epistemològic en què l'error passa a ser un component de la producció científica, quasi una necessitat imperiosa. Prendrem més endavant aquesta filosofia.

D'entre els obstacles que va desgranant al llarg de l'obra, els més interessants per a l'objectiu d'aquest assaig són els que es deriven de l'experiència quotidiana, també coneguts, atenent-nos a una expressió més actual, com els **preconceptes científics** (Lovell, 1966). Són inferències, judicis, suposicions o explicacions que fem (no només els nens) de manera natural i espontània quan la nostra curiositat és interpellada per un fet o un fenomen de la naturalesa. Per exemple, i per citar-ne algunes: «a l'estiu fa més calor que a l'hivern perquè el Sol està més a prop de la Terra», «la fusta flota perquè pesa poc», «l'aire no pesa», «Si una fusta es crema, els seus àtoms també», «en el buit no hi ha gravetat», «l'energia és una força», etc.

Aquestes idees, incrustades en la memòria implícita, afloraran més endavant en els aprenentatges relacionats amb aquests conceptes científics i actuaran com a àncores que produiran heurístiques errònies. Aquestes àncores no són obstacles que es poden evitar, ben al contrari, formen part de la motxilla personal de cada alumne i cal fer-los aflorar a l'aula i jugar-hi a fi de provocar conflictes cognitius que els redrecin.

Hi ha, però, una qüestió dels ancoratges que produeixen els preconceptes científics que cal tenir present. Com que la nostra memòria implícita té vida pròpia al marge de la consciència, tot allò que hi «memoritzem» està en continua ebullició en el brou as-

sociatiu, per tant, és d'esperar que una idea precientífica tingui les seves connexions amb unes altres, de manera que comprometen i condicionen aquestes últimes.

## El biaix de confirmació

Vet aquí un test clàssic que no té trampa amagada ni indueix a cap equívoc, però que genera debat. Cadascuna d'aquestes targetes té una lletra a una cara i un número a l'altra. Us en presenten quatre, tal com s'indica a la figura:

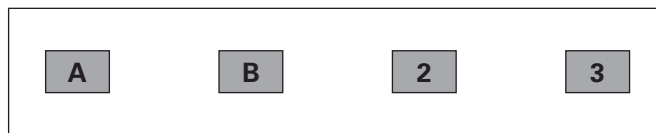


Figura 4.6

Es demana esbrinar si és cert l'enunciat següent en relació amb les quatre targetes: **Si una targeta té una vocal, aleshores té un nombre parell al revers.**<sup>31</sup> Podeu girar-ne tantes com vulgueu. Simuleu l'experiment mentalment i pregunteu-vos quina targeta girareu en primer lloc.

Com ja he dit més d'una vegada, un cas no fa una teoria per bé que pot il·lustrar-la. Els estudis indiquen que l'acció més freqüent és girar en primer lloc la targeta que mostra la lletra A i després la 2. Poca gent gira en primer lloc la B o la 3.

Presumiblement, si l'enunciat fos: **Si una targeta té una consonant, aleshores té un nombre parell al revers**, molt probablement les targetes B o 3 serien l'elecció majoritària.

El test de les targetes constata la nostra tendència a prioritzar i a significar tot allò que confirmi de manera directa i en positiu les nostres expectatives o conviccions, i ignorar o infravalorar allò que la contradigui o que se n'aparti. A aquest capteniment intel·lectual se'l coneix com el **biaix de confirmació**.

Entre verificar una cosa per confirmació o per falsació hi ha una diferència notable que explica la facilitat amb què valorem més les informacions que són favorables a les nostres expectatives o creences per damunt de les que les poden contradir. La pròpia definició del verb **confirmar** ens remet a refermar, a fer més segur, a corroborar, a revalidar, etc. És a dir, confirmar és afegir i sumar més proves que corroborin les nostres conviccions, carregar-nos de més raons (si s'escau aquí utilitzar el mot **raó**). La confirmació puntua positivament, en canvi, la falsació procedeix de manera adversa i negativa, invalidant i negant les hipòtesis, restant certitud a les nostres conviccions i creences perquè presenta evidències a la contra. La falsació és un concepte epistemològic posat en solfa pel racionalisme crític (Popper, 1972). Falsar una teoria científica és trobar casos que la contradiguin, sobretot de part dels seus postulats bàsics. És la manera més efectiva que té la ciència per progressar ja que la falsació obliga a redefinir les teories i les fa evolucionar.

Hi ha moltes situacions de la nostra vida quotidiana que corroboren que la nostra llàntia intuïtiva il·lumina amb més intensitat les afirmacions que són més confirmatòries per a les nostres expectatives, enfront de les negacions que també les poden confirmar. Per acreditar aquesta idea en l'àmbit escolar res millor que un entenedor passatger de l'obra *How Children Fail* (Holt, 1964) icona del moviment estatunidenc de

l'escola lliure, un passatge força citat pels psicòlegs cognitius que estudien el biaix de confirmació (Gilovich, 1991):

«Els nens i les nenes havien d'esbrinar un número comprès entre 1 i 10.000 en un màxim de vint preguntes. S'entesten amb la idea que l'única resposta bona és sí. Si pregunten: està entre 5.000 i 10.000? i els dic que sí, victoregen; si els dic que no, gemeguen, encara que la quantitat d'informació que obtenen és la mateixa en els dos casos.»

Ja ho deia Francis Bacon (1620): «és un error peculiar i perpetu de l'enteniment humà resultar més commogut i excitat per les afirmacions que per les negacions»

¿Però com opera el biaix de confirmació en els aprenentatges escolars? Aquesta és la pregunta que he de respondre.

Retornem a les explicacions de les solucions errònies dels alumnes que ja he documentat tant en el test de la llibreta i el llapis com en el test de la duplicació del quadrat. La majoria deien coses com aquestes:

«Perquè si tot costa 1,10 i la llibreta costa un euro més s'ha de restar 1,10 € menys 1 € i aleshores sabré quant costa el bolígraf.»

«Perquè el doble de 2 és 4 i s'ha de posar 4 quadrats per costat.»

Ja ho he dit més d'una vegada i no em cansaré de repetir-ho: quan ens equivoquem, no en som conscients, seria una paradoxa ser-ne. Això, en el ben entès que no són errors eruptius. És obvi que si creus que la solució que has trobat al problema que t'han plantejat és la correcta i has d'explicar-la o justificar-la, ho faràs sobre aquest supòsit, convençut que no vas errat. També he comentat que la majoria de les explicacions errònies es limitaven a repetir els càlculs que s'havien fet, i que aquests es presentaven com una prova confirmatòria. ¿On rau, doncs, el biaix de confirmació? En el cas que ens ocupa no es tracta d'un fet o d'una informació aliena a l'acció del subjecte, sinó que és la informació que ell mateix ha generat la que li ho confirma. De manera que es tracta d'un **biaix d'autoconfirmació**. ¿Quina prova és millor, per confirmar que la meua solució és la bona, que el meu propi convenciment?

És un peix que es mossega la cua, un bucle del qual no se'n surt fàcilment, llevat que es produeixi un conflicte cognitiu que el trenqui. Els propis errors, que s'ignoren com a tals, són instrumentalitzats inconscientment com a prova de confirmació de la seva veracitat.

Així opera el biaix de (auto) confirmació, creant i reforçant la **il·lusió cognitiva de saber**, que condemna la ment a rodar al voltant d'un miratge cognitiu. Cap aquí va, en part, la coneguda proposta **Els set sabers necessaris per a l'educació del futur** (Morin, 1999), que, a les portes del nou segle, publicà la UNESCO. El primer, que porta per títol **Les cegueses del coneixement: l'error i la il·lusió**, proposa que cal investigar com opera la cognició humana per tal de fer-ne, d'aquest coneixement, un dels set objectius primordials de l'educació del futur. Afrontar la fal·libilitat de la nostra ment i la seva tendència a instal·lar-se en les il·lusions cognitives passa necessàriament pel coneixement dels seus errors.

## Errors racionals

Que els biaixos cognitius generen heurístiques errònies és una evidència, i que aquestes es produeixen en el marc de la ment autònoma, també; tanmateix, atenent-nos a la teoria de les tres ments, queden per veure els errors que poden ser atribuïts a la ment racional i a la ment executiva. Quant a aquesta última, crec que els errors d'execució no presenten una riquesa interpretativa com els de la ment autònoma. En canvi, sí que cal aturar-se en els errors de la ment racional.

Error racional? Pot semblar una paradoxa, però si la idea de racionalitat implica principalment el control, la regulació i l'avaluació de l'activitat cognitiva, no ho és. Si el nostre geni cognitiu verifica tant les heurístiques que produeix com els algorismes que executa. En què consisteixen, doncs, els errors racionals?

Com sempre, recorro a casos concrets per explicar-me. Vet aquí dos problemes, un de càlcul i l'altre de geometria:

### Problema 1

Calcula  $24 \times 345$ . No pots fer la multiplicació, només pots sumar i multiplicar per 10.

### Problema 2<sup>32</sup> (figura 4.7)

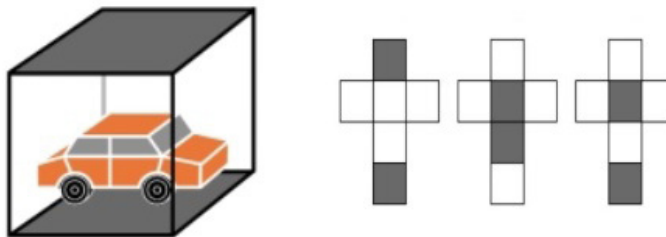


Figura 4.7

Una empresa d'embalatges ha dissenyat una capsa en forma de cub per posar-hi dins un cotxe miniatura. La capsa, un cub, té dues cares oposades pintades d'un color més fosc. Ajuda'ls a fer el disseny del cub desplegable.

1. Senyala amb quin d'aquests tres desplegaments correspon al cub que volen fer.
2. Dibuixa un desplegament diferent de la mateixa capsa.

A la figura 4.8 hi ha una resposta a cada problema, de dos alumnes diferents.

Per descomptat, no pretenc fer cap apologia del disbarat, ben al contrari, considero que són dues produccions molt interessants d'analitzar, malgrat que sorprenen per la seva embrollada confusió. Però aquí rau el nus de la qüestió: en com s'embolica la troca cognitiva, quan, de fet, no s'avalua el resultat de la pròpia acció cognitiva amb un mínim rigor.

Problema 1

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 \times 10 \\
 \hline
 00 \\
 24 \\
 \hline
 240 \\
 + 345 \\
 \hline
 580 \\
 \times 10 \\
 \hline
 080 \\
 580 \\
 \hline
 580 \\
 \times 10 \\
 \hline
 5800 \\
 5800 \\
 \hline
 6380
 \end{array}$$

Problema 2

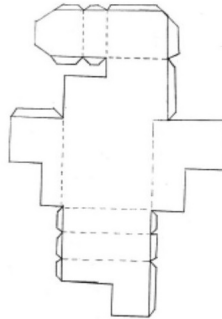


Figura 4.8

Observeu que ambdós processos s'han tancat, és a dir, que el procés resolutori ha arribat a un final que clausura l'activitat cognitiva. La solució del problema no s'ha deixat oberta o inacabada. Ambdós subjectes són conscients que han arribat a un final, i no hi ha cap indici que apunti en una altra direcció.

El fet d'haver-los tancat posa de relleu que ambdós subjectes creuen que han assolit l'objectiu del problema, és a dir, tenen la *il·lusió* d'haver-ne reeixit. Insisteixo en què aquesta il·lusió tapa i exclou qualsevol intent d'avaluació.

És evident que hi ha una **sobresaturació** d'algorismes executats, com si s'haguessin abraonat sobre el problema a cops d'algorisme, és a dir, identifiquen d'alguna manera quins poden ser els que condueixen a la solució, però no han elaborat una planificació racional. És com disposar les pedres per travessar un riu i en lloc de localitzar i ordenar els llocs on col·locar-les una rere l'altra per poder-les saltar d'una en una, es llancen a l'engròs com més pedres i més lluny millor.

## La big data dels errors d'aprenentatge

Es pot pensar que la finalitat d'estudiar els errors dels nostres alumnes és tractar de millorar els mètodes didàctics i disminuir la freqüència amb què es produeixen, és a dir, tractar de millorar els aprenentatges de les noies i dels nois de manera que s'equivoquin menys. Aquesta és una creença ingènua, perquè ningú ni res ens lliurarà d'aprendre per assaig i error ni dels biaixos cognitius que he exposat. Estan en el nostre ADN.

L'enfocament més fèrtil és conrear els errors, és a dir, deixar que surtin de manera espontània i natural, fins i tot provocar-los si no surten espontàniament, i, aleshores, ensenyar (la didàctica) com extreure'n coneixement. En resum: aprendre a equivocar-se.

El domini dels errors coincideix amb el de l'aprenentatge. És un camp molt ampli i ocupa, i malament si no ho fa, una bona part del quefer quotidià docent a l'aula. La quantitat d'errors que s'hi produeixen diàriament és ingent.

Malgrat haver descrit algunes tipologies d'errors basades, per una banda, en la presa de consciència del subjecte (errors eruptius i latents), i, per altra banda, basant-me

en la psicologia cognitiva (errors intuïtius, racionals, algorísmics i biaixos cognitius), no pretenc bastir una taxonomia de l'error.

De fet, pressuposo que tal taxonomia està abocada a l'ambigüitat i a la imprecisió. Una taxonomia implica categoritzar objectes, és a dir, disposar d'una sèrie de propietats ben definides i diferenciades entre elles, amb les quals aquests objectes són qualificats i després classificats i ordenats sense confusió possible. Però en el territori dels errors els objectes tenen almenys dues dimensions. Una, la que està escrita en un paper o representada en un altre suport, sí que és objectivable, però l'altra, la psicològica, no és tant evident. Ja s'ha vist amb uns quants dels errors que he anat presentant que, de vegades, he renunciat a interpretar-los per falta de referents clars. De manera que hi ha prou zones imprecises i fosques per desestimar l'intent d'una taxonomia rigorosa. A més, per poc que un estigui amatent als errors que es produeixen a l'aula, i en la mesura que acumules experiència docent, prou saps que sempre en surten d'inesperats, de nous, metamorfosis d'altres errors, etc. El territori dels errors no té una geologia estable.

Crec que és més factible practicar la mineria de dades en el domini de l'error-aprenentatge i associar a cada experiència cognitiva o aprenentatge específic un repertori obert d'errors. Així, si es vol informar a la comunitat docent d'un error fora bo objectivar-ne amb precisió el context, és a dir, el medi i la pràctica didàctica on s'ha produït. Per tant, només recol·lectant i examinant els repertoris d'errors associats a coneixements i a aprenentatges concrets es podrà fer avançar la didàctica.

Adoptant un dels paradigmes de la societat digital, hi ha una big data dels errors escolars encara per aflorar, descobrir i explorar. Sens dubte constitueix un repte per al progrés pedagògic, perquè en podem aprendre molt, això, si l'aconseguint exposar a la llum pública.

Sorprèn, almenys a mi, que amb la quantitat d'avaluacions que es fan (proves de competències bàsiques, proves PISA, etc.) no s'aprofitin també per investigar els errors que, sens dubte, hi ha en aquest tipus d'avaluacions. És una quantitat de dades de la qual se n'aprofita només una part per fer inferències estadístiques, que són necessàries però que poca cosa diuen sobre com es produeixen els aprenentatges. Aquesta mancança constata que no es valoren els errors com un actiu pedagògic de primer ordre.

Mentrestant, cada docent, cada escola, amb les seves pràctiques, afronta els errors d'aprenentatge com sap i com pot. En general, però, per poca empatia que es tingui amb els alumnes i per poc que s'estimi l'ofici de mestre, s'acaba ensenyant als alumnes a obtenir coneixement dels seus errors. I això ens obre la porta del proper capítol.



# 5

## Quan els genis aprenen a equivocar-se De l'error al coneixement

*No ho dubteu. L'error és la regla: la veritat és l'accident de l'error.*

Georges Duhamel

L'escenari és el laboratori de ciències. En entrar, els nois i les noies es troben les clàssiques balances gravitatòries que ja coneixen d'altres activitats, de manera que les manegen amb una mínima habilitat: saben que cal pujar l'alçaprem per treure o posar pesos i baixar-lo per veure com s'equilibren les masses dels plats, si no, corren el risc que els plats de la balança es desencaixin. Avui, però, veuen que hi falten tots els pesos, llevat de dos: un d'1 g i l'altre de 20 g. Al costat de la balança hi brilla una petita safata plena de xinxetes.

—Llapis, paper i calculadora —els demano que treguin.

La quinzena de cares expectants, agrupats per parelles, em miren encuriosits. **De què vas avui, profe?**



Figura 5.1

Alguns ulls em miren recelosos: massa fàcil. Si fa no fa, cada parella trigarà un parell de minuts a pesar els 20 g de xinxetes. N'hi ha que endebades s'esmercen per aconseguir un equilibri perfecte entre els dos plats, i per això triguen una mica més. Per a aquestes activitats prefereixo balances mecàniques, que, sens dubte, són més atractives que les electròniques.

—No us ho posaré tan fàcil, oi que no? —els dic. Alguns caps ho confirmen, amb un gest aquiescent—. Resulta que jo soc del departament comercial i us demano el pes d'una sola xinxeta, perquè estic pensant de vendre xinxetes per quantitats fixes. Algú em pot dir quant pesa una sola xinxeta, ni que sigui aproximadament?

—Ens falten els pesos petits —diu una veu.

—És que ens els han robat —contesto, fent-me el resignat —Alguna idea?

—Està tirat —intervé una altra veu— comptes les xinxetes i divideixes.

—No és mala idea, no. Va, teniu llapis, paper i calculadora i tothom sap comptar xinxetes.

Poc després, ja es veuen algunes parelles de braços plegats, esperant...

—Bé —intervinc un parell de minuts més tard, quan la majoria s'espera— que surti algú a la pissarra i que apunti els resultats: quantes xinxetes ha comptat cada equip i quant pesa una xinxeta (a primer d'ESO no distingim entre massa i pes).

Tinc apuntades les dades de la darrera vegada que vaig fer aquesta activitat amb cinquanta-vuit alumnes. La majoria van comptar entre 53 i 55 xinxetes, i aquests van ser els càlculs (prenent 54 xinxetes com a mitjana):

11 alumnes van fer aquest càlcul:  $20:54=0,37g$  pesa una xinxeta

47 alumnes van fer aquest càlcul:  $54:20 =2,7g$  pesa una xinxeta

—Vaja —anava comentant a mesura que s'escriuien els resultats a la pissarra—, no hi ha acord unànime, hi ha molta diferència de pes. Uns afirmeu que una xinxeta pesa 2,7 g i uns altres, 0,37 g. Caldrà que proveu la vostra solució o que refuteu l'altra. Qui vol començar?

## Induir i planificar el conflicte cognitiu

L'error de confondre el divisor pel dividend es pot atribuir a un efecte **d'àncora**. La majoria dels alumnes han experimentat moltes més divisions amb els dividends més grans que els divisors que a la inversa. Penseu que la decisió d'assignar al 54 el paper de dividend i al 20 el de divisor és de naturalesa intuïtiva. Ningú no va plantejar cap altra operació que una divisió.

A més dels procediments i dels conceptes físics i matemàtics implicats, i sabent per endavant que molts alumnes plantejarien la divisió al revés, el principal objectiu didàctic de l'activitat consistia a provocar un conflicte cognitiu i derivar-ne una lliçó de racionalitat. I respecte a les noies i els nois que van plantejar correctament la divisió, l'objectiu didàctic específic consistia a reforçar, en el debat, els seus arguments, i ajudar-los perquè els expressessin amb claredat i precisió. És una bona pràctica docent diversificar una mateixa activitat didàctica en diferents concrecions i nivells de complexitat, ajuda a entendre que és més atractiu per a tothom (professorat i alumnat) que els objectius curriculars no siguin plans, sinó profunds.

Si en lloc de xinxetes haguera treballat amb boles de vidre o qualsevol altre objecte amb una massa superior a 1 g, la quantitat de boles hauria estat inferior a 20, de manera que la gran majoria d'alumnes haurien plantejat la divisió correcta. L'efecte àncora hauria funcionat igual, però no hauria produït les heurístiques errònies que volia i, per descomptat, no hauríem gaudit d'un ric debat per encendre la llum de la racionalitat.

Aquesta activitat és una mostra de l'estratègia didàctica de l'error planificat, i es pot preparar si pots anticipar, en relació amb un aprenentatge específic, quins errors es produiran amb més freqüència a l'aula, cosa que saps si has repetit el tema unes quantes vegades. Generació rere generació veus que errors com aquest es van repetint. La idea que com més experiència docent menys errors en els aprenentatges dels alumnes és, si més no, relativa. Pot canviar l'alumnat, però no pas la configuració bàsica de la ment.

No hi ha res millor que un bon debat, que hi hagi companys que no corroborin els teus resultats. I en el joc dialèctic es veuen un munt d'emocions en acció, i és una bona oportunitat per aprofundir en el coneixement de la personalitat de cadascú.

El paper docent se centra en l'arbitratge del torn de paraules, a administrar els protagonistes i sobretot a fer valer la consistència i l'objectivitat de les argumentacions quan algú identifica en què consisteix l'error. Insistiré, i molt, que aquesta mena de debats o pluges d'idees són determinants per a una educació de la racionalitat.

## Aprendre dels errors: les tres fases

L'erupció d'un conflicte cognitiu, tant si és espontani com si és induït, és segurament la millor i potser l'única manera eficient de prendre consciència dels errors, per tant, és la **primera fase** per passar de l'error al coneixement. I és obvi que mobilitza emocions de molt diversa índole. Si són emocions en positiu, és a dir, que incentiven la curiositat i la motivació, oli en un llum, però no sempre es així. Atenció a les reaccions emocionals de cada alumne quan s'adonen que s'han equivocat.

Una cosa és saber que t'has equivocat i una altra de molt diferent és localitzar, identificar i analitzar en què consisteix l'error. Aquí comença la **segona fase**. De fet, comença com a problema que cal resoldre. Pot ser que es resolgui ràpidament, com en el cas de les xinxetes, però que no sempre és així.

Com a problema, una característica rellevant que cal tenir en compte és que d'entrada no es disposa de cap enunciat, és a dir, que no se sap en què consisteix l'error, i fins que no es localitza i s'identifica com a tal es poden donar molts tords. De manera que es generaran heurístiques que tant poden ser encertades com errònies. Podem trobar-nos amb errors que nien dintre del primer error i entrar en laberints inextricables: és el risc cognitiu. Si l'error està ben localitzat i es comprèn com s'ha produït, aleshores es pot analitzar i fer-ne una diagnosi que ens aportarà un coneixement valuos per obrir la **tercera fase**.

El coneixement que s'obté una vegada es resol el problema secundari de la identificació i de l'anàlisi de l'error és imprescindible per elaborar la nova temptativa cognitiva que abordarà de nou el problema primari; de fet, és el seu trampolí. L'eliminació o la depuració de l'error es produeix quan reix la nova temptativa. Per descomptat que aquesta també pot ser errònia, de manera que el procés de resolució del problema és una dinàmica cognitiva d'assajos i errors conduïda i controlada pel procés racional d'avaluació. En això consisteix bàsicament l'aprenentatge per assaig i error, vist, és clar, des de l'òptica individual; més endavant l'abordaré des d'una perspectiva social, que és la realitat de l'aula.

És important adonar-se que la segona i la tercera fases constitueixen tot un **nou problema que nia en el problema original**, en el cas, òbviament, de produir-se un

error. I si es té en compte la diversitat dels errors en el context de l'aula, aquest problema secundari acostuma a tenir diverses expressions.

Abans, un apunt sobre el concepte de **temptativa**, que és força antic en l'àmbit pedagògic (Freinet, 1966), que es correspon amb el concepte d'assaig, en el benentès que es tracta d'assajos intel·ligents, no pas d'assajos a l'atzar. Ja he apuntat en el segon capítol què entenc per temptativa cognitiva: el binomi format per una heurística i l'algorisme que se'n pot derivar ( $H \rightarrow A$ ). Així, doncs, la ment autònoma i la ment executiva actuen una a continuació de l'altra. Una derivada important d'aquest concepte és que d'alguna manera l'error, si n'hi ha, està contingut en la pròpia temptativa.

Tractaré de mostrar aquestes tres fases en l'anàlisi de tres casos, i, més endavant fonamentaré la proposta didàctica que exposo en aquest assaig. La idea base és que sovint es passa de l'error al coneixement apuntant-se en el propi l'error, d'aquí el gran valor epistèmic que té (Kuhn, 1962; Feyerabend, 1970; Popper, 1972; Mayo, 1996).

### Cas 1: El desllorigador de Sòcrates

L'escena té un punt de romanticisme pedagògic. Entre un front ample i un nas camús, els ulls vivaços de Sòcrates observen el minyó. Ambdós tenen a la mà una canyeta prima de dos pams de llargada que apunten al sorral quadrat de sorra fina i daurada, no gaire gran, d'uns cinc o sis pams de costat. També hi ha un regle que serveix tant per dibuixar com per aplanar la sorra. Dempeus i presenciant l'escena hi ha en Menó.

La figura 5.2 s'ha de llegir com els fotogrames d'una animació:

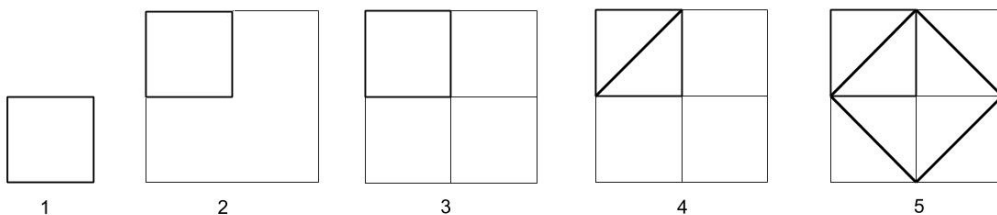


Figura 5.2

1. Sòcrates dibuixa el quadrat inicial i li demana al minyó que dibuixi un quadrat amb el doble de superfície.
2. El minyó prolonga dos costats del quadrat fins el doble de longitud i completa el nou quadrat, de manera que el quadrat inicial queda a l'interior (cosa important). Tal com vam veure al capítol anterior, aquesta és una heurística errònia que simplifica i substitueix l'enunciat inicial: si el quadrat ha de tenir el doble de superfície, els seus costats també han de tenir el doble de longitud. Recordeu que aquesta mena d'heurístiques són molt convincents i persuasives per al subjecte, ja que desestima l'avaluació perquè la creu innecessària, tal és la força de les il·lusions cognitives. Però atenció a un detall: el quadrat erroni s'ha construït sobre el quadrat original. Es podria haver construït al costat de l'original, de manera independent. És un detall que després es revelarà com a determinant en l'estratègia didàctica socràtica.

### (Primera fase)

3. Sòcrates, conscient de la ceguesa de les il·lusions cognitives, s'esmerça a fons per causar al minyó un conflicte cognitiu. Per això li fa prolongar els costats del quadrat inicial de tal manera que el quadrat gran queda partit en quatre quadrats iguals que l'inicial. El conflicte cognitiu està servit: el minyó s'adona que ha dibuixat un quadrat el quàdruple de gran que l'inicial, i no pas el doble. Si llegiu el text original, veureu que fins i tot Plató va descriure la reacció emocional del minyó: era d'esbaltiment.

### (Segona fase)

Una vegada el deixeble ha pres consciència que s'ha equivocat, se li obre un nou problema. Sòcrates el guia a identificar que l'error consisteix en què ha duplicat la longitud del costat del quadrat original.

### (Tercera fase)

4. I aquí és quan Sòcrates indueix el minyó a destil·lar coneixement del seu l'error, i ho fa desllorigant la veritat del dibuix erroni. És llavors quan li dibuixa la diagonal del quadrat inicial, però atenció: encarada cap a l'interior del quadrat gran.
5. I ara es veu per què aquesta disposició era premeditada, ja que inspira la nova heurística del minyó, facilitant la percepció de la solució.

## Cas 2: Programar un gat que xuta penals

Vet aquí un petit projecte de programació fet amb Scratch. En el darrers anys hem assistit a una eclosió d'entorns de programació visuals dissenyats específicament per a l'escola. Propostes com Etoys, Scratch, Snap, Code, etc., tots ells hereus de la tradició LOGO,<sup>33</sup> estan donant magnífiques prestacions didàctiques.



Figura 5.3. Font: <<https://scratch.mit.edu/projects/3298287>>

Sens dubte, una de les causes de l'expansió d'aquests recursos didàctics és que incorporen el principi d'assaig i error en el disseny de la seva interfície, l'aprenentatge basat en la resolució de problemes i el treball per projectes, a més d'un munt de recursos multimèdia; tot això potenciat per xarxes socials específiques associades

a aquestes plataformes a través de les quals es comparteixen projectes amb altres usuaris de tot el món.

Una de les prestacions didàctiques més emblemàtiques d'aquests entorns digitals és la immediatesa en què s'executa el codi que l'usuari programa; això fa que les seves temptatives i els objectius que ha projectat es puguin comprovar a l'instant, de manera que els errors tant en l'anàlisi del problema com en la seva programació, i sovint n'hi ha, emergeixen de manera **eruptiva** la majoria de les vegades, i causen efectes inesperats, alguns molt aprofitables en la generació de noves idees i projectes. La presa de consciència de l'error és immediata i de seguida s'engega el procés d'identificació de l'error i de producció de noves heurístiques. Aquí es fa realitat aquella dita segons la qual «el millor mestre és el nostre últim error».

En el projecte «El gat xuta penals» (figura 5.3), prement la tecla espai, el gat, estigui on estigui del camp, va al punt de penal, agafa carrera i quan toca la pilota, la xuta i la pilota va cap a la porteria. Una vegada el gat ha xutat, tant ell com la pilota tornen a la posició inicial, i està llest per xutar de nou.

En el context dels aprenentatges bàsics de la programació orientada a objectes, l'objectiu didàctic del gat que xuta penals se centra a aprendre a programar la interacció entre objectes mitjançant uns «esdeveniments» anomenats missatges.

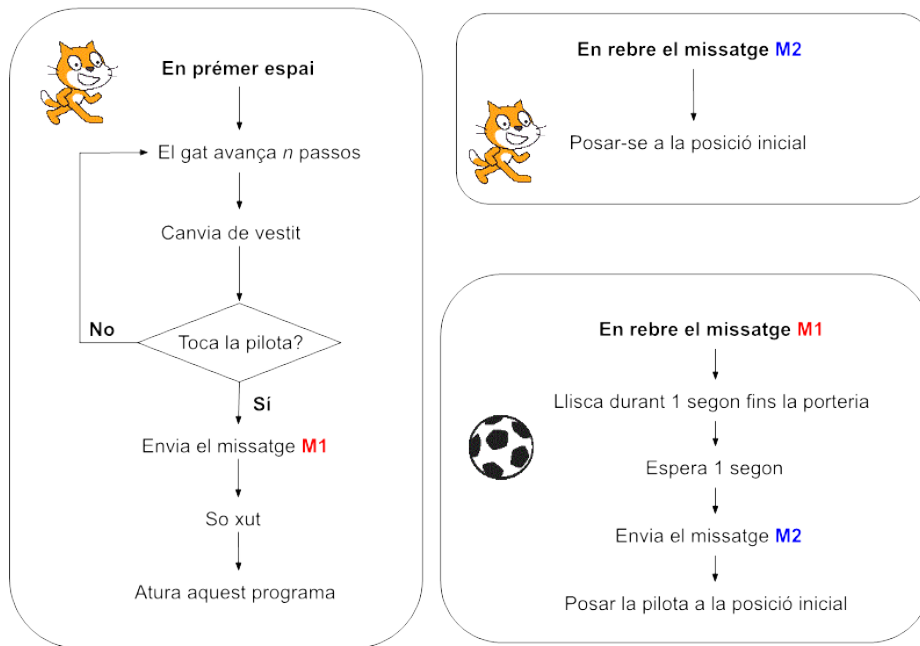


Figura 5.4

L'activitat didàctica comença amb una descripció detallada del projecte: l'objecte **gat** va avançant una quantitat de passos determinats en línia recta i quan toca l'objecte **pilota**, s'atura i li envia un missatge per tal que aquesta es desplaci cap a la porteria. En arribar-hi, la pilota torna a la posició inicial i envia un missatge al gat perquè torni a la

posició inicial. Una descripció que cal concretar en algorismes i representar mitjançant diagrames de flux, cosa que ja constitueix tota una lliçó per si mateixa (figura 5.4).

Primer cal pensar-ho i després fer-ho.

Vegem el treball de l'alumne C.P.

El teniu a: < <https://scratch.mit.edu/projects/3300291/#fullscreen> >

(premeu espai per iniciar)

### (Primera fase)

A la figura 5.5, a la dreta, s'hi representa l'error eruptiu de CP: la pilota va continuament de la posició inicial a la porteria i d'aquesta a la posició inicial. No hi ha solució de continuïtat i el bucle es repeteix indefinidament (en vermell a la figura 5.5). Vet aquí una oportunitat per aprendre una característica dels missatges.

### (Segona fase)

En primer lloc haurà d'identificar l'error, és a dir, esbrinar en què consisteix, localitzar quins són els blocs (instruccions) que produeixen el bucle; i, després, esmenar el programa per assolir l'objectiu, és a dir, decidir quins han de ser els nous blocs o com els ha de modificar.

Observeu (fletxes verdes de la figura 5.5) que el gat envia el missatge «futbol», i també se li programa què ha de fer en rebre el missatge «futbol»: anar a la posició inicial. CP ha programat la pilota quan rebí aquest missatge, i a l'interior del mateix programa també s'envia el mateix missatge «futbol». Conclusió: la pilota entra en un bucle sense fi i no para d'anar i tornar.



Figura 5.5

### (Tercera fase)

S'aprendrà de l'error i s'efectuarà una nova temptativa (H  $\rightarrow$  A) només si s'extreuen aquests dos coneixements:

- Si un objecte s'envia un missatge a ell mateix (autoenviament), repetirà continuament les instruccions dels blocs que comprèn, llevat, és clar, que es programi una interrupció.
- Si hi ha dos objectes que han d'interactuar entre ells enviant-se mútuament missatges, és millor usar dos missatges diferents.



### Cas 3: El Sol i la calor

La finalitat d'aquesta lliçó és comprendre el fenomen físic que produeix la diferència de temperatura entre el migdia i el matí, i també, per extensió, entre l'estiu i l'hivern. Es tracta de construir una explicació científica, és a dir, un coneixement que fa transparent la relació de causa-efecte.

Vet aquí el problema:

1. Els raigs del Sol transporten llum i calor.
2. Sigui l'hora del dia que sigui, els raigs del Sol que ens arriben són els mateixos i sempre transporten la mateixa quantitat de calor: el Sol és el mateix.
3. La calor que transporta un raig de llum es distribueix sobre la superfície que il·lumina.
4. Tant si és hivern com si és estiu, al migdia sempre fa més calor que al matí o a la tarda.

Pregunta: Si els rajos del Sol són els mateixos, per què fa més calor al migdia?

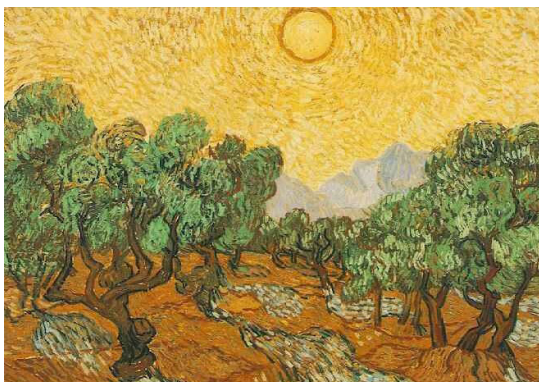


Figura 5.6. Van Gogh. Pintura a l'oli sobre llenç. Saint Rémy de Provence. França, novembre de 1889.

Es tracta, doncs, d'articular un discurs lingüístic i lògic seguint la pauta definida per l'estructura lògica d'una explicació científica (Hempel, 1965), que es pot resumir en l'esquema següent:

Enunciats de condicions antecedents i lleis generals. (Causa)	Deducció lògica	Descripció del fenomen empíric que s'explica. (Efecte)
---	-----------------	--

Des de la perspectiva cognitiva és important adonar-se que el nexa entre la causa i l'efecte es farà mitjançant una **heurística del raonament deductiu**, de manera que els errors que es puguin produir s'originaran aquí.

Resumeixo breument el desenvolupament de l'activitat abans d'analitzar un cas.

En primer lloc, es parteix de l'evidència del fenomen de la diferència de calor al matí i al migdia, i a l'hivern i a l'estiu. Malgrat que és una experiència diària i quotidiana que tots tenim, l'observació sistemàtica de la trajectòria del Sol al llarg del dia no és trivial i evident, de manera que vaig recórrer al simulador **Stellàrium** per sistematitzar



les observacions. A més d'això, van tenir la possibilitat de construir amb **Geogebra** la simulació d'un raig de Sol<sup>34</sup> sobre la superfície terrestre al llarg del dia i jugar-hi per observar els angles d'incidència i la superfície il·luminada (figura 5.7).

Després havien de descriure dues observacions:

- La relació entre la inclinació del raig i el moment del dia: al migdia el raig cau més vertical que al matí o a la tarda.
- La relació entre la inclinació i la quantitat de superfície il·luminada: com més inclinat cau el raig, més superfície il·lumina.

Amb les dues observacions més un vocabulari precís que els facilitava, els alumnes havien de redactar l'explicació (**migdia, matí, tarda, raig, Sol, il·luminar, calor, superfície, distribuir, repartir, concentrar, vertical, inclinació, més, menys. Si, aleshores, per tant**).

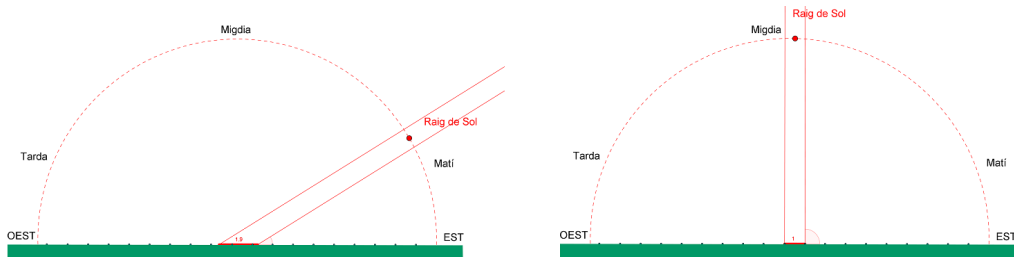


Figura 5.7. vegeu simulació interactiva a <https://www.geogebra.org/m/krPqvqEU>

Un apunt sobre això últim, ja que és un recurs que utilitzo molt sovint quan una activitat requereix la redacció d'una descripció o d'una relació causa-efecte, com ara és el cas.

Acostumo a facilitar la llista dels mots més pertinents (substantius, adjectius i verbs principalment). La considero una bona pràctica docent, ja que són els descriptors de la realitat que observen i la representen en l'àmbit lingüístic i cognitiu. Així, les frases que redacten expressen el seu pensament i són també un bon indicador de l'estat del seu aprenentatge. Cada mot en joc és un component lingüístic de la construcció cognitiva, i, en la mesura que aquests són compartits per tot el grup, faciliten molt el debat entre ells i em permeten un seguiment i una avaluació eficient dels aprenentatges.

Així, analitzant les produccions lingüístiques dels alumnes, homogeneïtzades per l'ús dels mateixos components lingüístics, es poden detectar i diagnosticar amb més eficiència els errors cognitius.

Atenent-nos a l'esquema de l'explicació científica, la deducció que cal fer (l'heurística deductiva, des del punt de vista cognitiu) consistirà a **comparar** la calor que rep una mateixa unitat de superfície al matí i al migdia. I per esbrinar-ho cal establir una relació de **proporcionalitat inversa** entre la quantitat de calor que transporta el raig de Sol i la superfície que il·lumina, és a dir: com més superfície il·luminada hi ha, menys calor per unitat de superfície. Dit d'una manera més planera: com que el raig de Sol porta la mateixa quantitat de calor, si hi ha menys superfície il·luminada la calor es concentra més; o bé, si hi ha més superfície il·luminada la calor es reparteix més.

Vegem la temptativa de S.G. (he respectat el text original, sense modificar ni l'ortografia ni la sintaxi).

*«Al mati i a la tarda el Sol esta mes inclinat i al migdia esta mes vertical, per tant al migdia fa mes calor que al mati o a la tarda porque al migdia dona a menys superficie i al mati o tarda mes superficie.»*

Costa de llegir i entendre, oi?

#### (Primera fase)

És evident que no ens trobem davant d'un error eructiu, i hem de fer que S.G. prengui consciència que el seu text és confús i que no explica clarament quina és la causa perquè al migdia faci més calor que al mati. És una bona pràctica repassar i rellegir el text que un acaba d'escriure. Tenim la capacitat empàtica de simular que és una altra persona qui escolta el nostre text i avaluar si té sentit, és a dir, si s'entén bé. Demanar el concurs i l'opinió d'altres oients és un recurs a l'abast. És una bona pràctica docent propicia que tothom s'acostumi a llegir en públic i en veu alta els seus textos.

#### (Segona fase)

L'estratègia didàctica és analitzar amb ell l'estructura lògica del seu text. Tot i que no cal parlar-li en aquests termes, aquí sí que podem referir-nos a les proposicions explicitades en el text i als connectors lingüístics, de manera que tindrem:

1[Al mati i a la tarda el Sol esta mes inclinat] i 2[al migdia esta mes vertical], per tant 3[al migdia fa mes calor que al mati o a la tarda] porque 4[al migdia dona a menys superficie] i 5[al mati o tarda mes superficie].

$$(1 \wedge 2) \rightarrow 3 \leftarrow (4 \wedge 5)$$

Evidentment, a l'aula estant no cal expressar aquesta anàlisi formal, però sí numerar les proposicions i aïllar-les una a una i comentar com s'ha muntat el text.

Salta a la vista que la proposició 3, és a dir, l'efecte que s'ha de deduir de les causes 1, 2, 4 i 5, no es troba al final de la cadena deductiva, la qual cosa porta a una estructura lògica enrevessada i poc intel·ligible. Adoneu-vos també que hi manca la relació entre la calor del raig de Sol i la superfície il·luminada. S.G. no ha usat els verbs del vocabulari que s'hi refereixen.

#### (Tercera fase)

També ajudarà a millorar el seu text, és a dir, a fer una nova temptativa, llegir un parell de textos més reeixits, que sempre n'hi ha. Per exemple, aquest parell:

M.L.: Si, al migdia els raigs de Sol estan menys inclinats il·luminen menys superficie que al mati o la tarda, els raigs solars estan mes inclinats i il·luminen mes superficie, per tant al migdia la calor esta mes concentrada i fa més calor.

M.L.: Si, 1[al migdia els raigs de Sol estan menys inclinats] 2[il·luminen menys superficie que al mati o la tarda], 3[els raigs solars estan mes inclinats] i 4[il·luminen mes superficie], per tant 5[al migdia la calor esta mes concentrada] i 6[fa més calor].

$$(1 \wedge 2) \wedge (3 \wedge 4) \rightarrow (5 \wedge 6)$$

A.Z.: Al migdia els raigs donen de forma vertical, es a dir que no distribueix tant la calor com al matí o la tarda, per tant, a la tarda i al matí es reparteix més la calor per tota la superfície i fa més fred que al migdia.

A.Z.: 1[Al migdia els raigs donen de forma vertical], es a dir que 2[no distribueix tant la calor com al matí o la tarda], per tant, 3[a la tarda i al matí es reparteix més la calor per tota la superfície] i 4[fa més fred que al migdia].

$$(1 \wedge 2) \rightarrow (3 \wedge 4)$$

Vegeu en els dos textos que les cadenes deductives són lineals i que de les causes se segueix l'efecte. En cap dels dos textos s'ignora la relació entre la calor del raig de Sol i la superfície il·luminada, cosa que queda reflectida per l'ús del verbs repartir, distribuir i concentrar. S.G. se n'adonarà que no els ha usat.

Però no només S.G. va aprendre dels seus errors. En el pla didàctic, els textos confusos que van generar durant l'activitat em va fer veure que podia millorar la simulació del raig de Sol per facilitar que la clau cognitiva de la simulació es troba en visualitzar la **calor** del raig de Sol i la seva **concentració** (distribució o repartició) sobre la superfície a través d'una analogia molt clara (vegeu la figura 5.8).

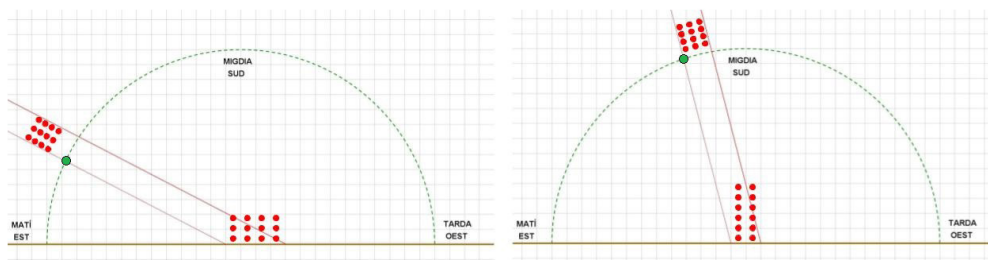


Figura 5.8

## De l'error al coneixement

Casos com aquests constaten dues característiques essencials del procés d'assaig i error durant la resolució de problemes, que possibiliten el pas de l'error al coneixement:

- La identificació d'un error suposa l'emergència d'un nou problema (Pi). Nou perquè no està contingut en l'enunciat del problema inicial (P).
- La resolució d'aquest nou problema implica la generació d'un nou coneixement que formarà part de la nova temptativa per resoldre el problema inicial.

Identificar l'error i generar la nova temptativa són objecte del control cognitiu que exerceix la ment racional.

Tal com ho veig, el paradigma constructivista del coneixement es projecta directament sobre el principi de l'aprenentatge per assaig i error, en el ben entès, i torno a in-

sistir-hi, que un assaig no és pas un provatura a l'atzar sinó que sempre és intel·ligent, amb independència que sigui reeixida o no ho sigui.

En el proper capítol abordaré amb profunditat la proposta didàctica d'aquest assaig basada en el paradigma constructivista i en el principi de l'aprenentatge per assaig i error. De moment, el diagrama de la figura 5.9 vol esquematitzar el flux del control cognitiu racional que fa possible el pas de l'error al coneixement:

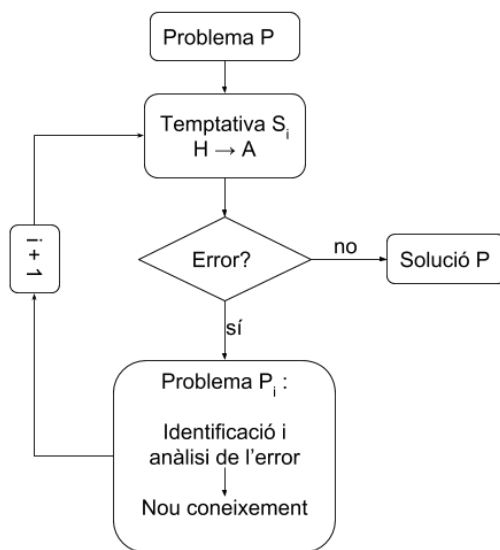


Figura 5.9

# 6

## L'aprenentatge per assaig i error

### La construcció de coneixement

*Aquells que considerin el ric material de què ens forneix la història [...] els semblarà que només es pot defensar un sol principi [...] em refereixo al «tot s'hi val».*

**P. K. Feyerabend** (1924-1994). *Contra el mètode*.

*Si pensaves que la ciència era certa, només és un error teu.*

**Richard Feynman** (1918-1988)

*Tot el que s'ensenya a un nen se li priva d'inventar-ho o de descobrir-ho.*

**J. Piaget** (1896-1980). *Entrevista a El País, 15-4-1978*

L'escenari pot ser l'aula ordinària, el laboratori de ciències o el taller de tecnologia. L'activitat d'avui no requereix d'un equipament específic. Cada parell de mans juga amb el clàssic imant rectangular d'alnico (aliatge d'alumini, níquel i cobalt); també tenen una petita bola d'acer, de manera que tothom està entretingut jugant amb la bola i l'imant. Només hi ha una petita diferència respecte dels «imants didàctics» que tradicionalment formen part dels equips didàctics d'electromagnetisme: els nostres no tenen els pols marcats amb dos colors. I no estan marcats de manera expressa. Si tenen els pols marcats se'ls està proporcionant un coneixement que ells mateixos poden descobrir.

—Bé, tots heu jugat amb un imant alguna vegada i no cal dir-vos que només atrau el ferro o l'acer, i algun altre metall més com el níquel. Tot jugant amb la bola heu d'haver vist un fenomen curiós, no?

Silenci a les cares.

—No? —insisteixo

—Que l'imant l'atrau? —pregunta una veu cautelosa, poc segura.

—Sí, és clar, però no es gaire curiós, això. Ja ho sabeu, que el diable s'amaga en els petits detalls.

—Que la bola sempre va a les puntes de l'imant —afirma una veu decidida.

—Són els pols nord i sud —assevera una altra veu

—Però això que dius es refereix als pols de la terra, no? Què té a veure a veure amb els imants?

—Però es diuen d'aquesta manera —insisteix, tot i que ja no ho pot argumentar més.

—Ja tens raó i ho veurem d'aquí poc, per què es diuen així. Però continuem: no és un detall sense importància que la força magnètica es concentra als extrems de l'imant. Als extrems se'ls anomena pols. Que a un se l'anomeni nord i a l'altre sud ho descobrirem avui. Per començar, algú de vosaltres ha jugat alguna vegada amb dos imants? —pregunto, i com que no s'aixeca cap mà, continuo.— Ara és el moment, doncs, d'interactuar amb l'imant del costat.

Faran de tot, però aviat observaran la interacció entre pols magnètics, cosa que és la primera vegada que experimenten. Amb un sol imant és impossible de veure l'atracció i la repulsió.

—Alguna cosa a dir? —pregunto.

—Que els pols diferents s'atrauen i els que són iguals no es poden ajuntar — fan un espòiler.

—I per què no al revés? —li rebato, i continuo—, hi ha una bona pregunta per fer-se, ara. Qui s'arrisca a preguntar?

No triguem gaire a alçar-se unes quantes mans. En trio una.

—I com se sap si s'atrauen o es repel·leixen?

—Els encares i ho sabràs —responc amb un gest escèptic—. Necessito una bona pregunta.

Queden un parell de mans alçades:

—I com se sap si de veritat hi ha pols diferents?

—I com se sap quin és el nord i quin el sud?

—A bones preguntes, respostes intel·ligents. Qui contesta la primera? —de-mano.

—Si els pols fossin iguals, o s'atraurien o no s'ajuntarien, només passaria una sola cosa i tant li fa com els possessis, però això no passa —raona l'autora de la pregunta.

—Què us sembla la resposta? — la majoria aproven la resposta amb un gest afirmatiu. L'autora somriu, complaguda.

—Anem per la segona. Si tens dos imants, com pots saber, per a cada imant, els dos pols que són iguals.

Silenci a l'aula.

—Amb dos imants és impossible saber-ho —afirmo—. Us proposo l'experiència següent —els dic—. Cal un tercer imant que faci de testimoni. Usarem el teu imant, ja que has fet la pregunta. Surt i agafa el teu imant de manera que només ensenyis un pol, el que vulguis.

Es fa un silenci expectant, de curiositat, perquè no saben què passarà a con-tinuació.

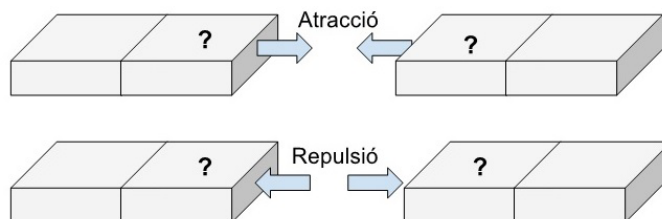


Figura 6.1

—Surt tu ara —assenyalo la persona que seu al davant— i li encares el teu imant, pel pol que vulguis, com que no sabem distingir-los tant se val el que sigui.  
Ho fa.

—L'atreu o el repel-leix? —li pregunto.

—L'atreu —contesta.

—Quiet, no el moguis! Enganxa-li aquest gomet —ja tinc preparat sobre la meua taula un rotlle de gomets de color vermell. Ara surt tu —assenyalo la taula del costat— i fas el mateix; encara'l pel pol que l'atrau i posa-li el gomet.

Ho fa.

—Aneu sortint i feu el mateix —m'adreço a la classe.

Sense necessitat de més instruccions es forma una cua davant de l'imant testimoni, i en pocs minuts tothom té el gomet vermell posat a un pol del seu imant, llevat del testimoni.

—De moment, el testimoni s'espera per posar-hi el gomet. Mireu el pol vermell dels altres imants, quina és la vostra conclusió?

—Què tots són el mateix pol —afirmen diverses veus.

—En efecte, si es comporten igual davant del pol testimoni, han de ser el mateix pol —argumento mentre m'adreço a qui ha fet l'espòiler— ara ja esteu en condicions d'esbrinar si els pols iguals s'atrauen o es repel-leixen. Comproveu-ho amb l'imant veí.

Satisfet, observo com interactuen a través dels imants respectius. La conclusió s'imposa.

— Ara, l'imant testimoni ja pot saber quin és el seu pol vermell.

—Però jo tenia raó, **profe** —em diu qui ha fet l'espòiler.

—Sí, però no havies vist tota la pel·lícula. I encara queda molt per al final.

Fa una ganyota d'estranyesa.

—En efecte, els imants encara ens han de donar moltes sorpreses. Encara hi ha temps per a una més. Mireu com penjo el meu imant.

Trec un tros de fil d'uns 30 cm, el doblego fent una baga, poso l'imant travessat al mig i l'extrem el faig passar per interior de la baga de manera que l'imant queda agafat, l'aixeco i queda suspès del fil.

—Que tothom pengi el seu imant i mireu que quedi ben equilibrat. Un minut per fer-ho, i sortirem al pati.



Figura 6.2

Al pati estant i ben repartits per evitar influències magnètiques dels imants veïns, tothom va observar que tots els imants queden orientats en la mateixa direcció: un pol cap al nord i l'altre cap al sud sobre la línia imaginària del meridià. S'obre un nou misteri i la curiositat per esbrinar-lo està servida. Podeu veure l'activitat completa sobre el magnetisme a: <http://apliense.xtec.cat/arc/node/31027>.

## Dos apunts sobre el coneixement científic i tecnològic

1. Alguns diccionaris presenten la ciència com «un conjunt de coneixements derivats de l'observació i del raonament sistemàticament estructurats dels quals es dedueixen lleis generals i principis amb capacitat predictiva que es poden comprovar de manera experimental». I la tecnologia la defineixen com «el conjunt de teories i tècniques que permeten l'aprofitament pràctic del coneixement científic». Des del punt de vista històric i conceptual, aquesta diferenciació entre ciència i tècnica deriva de la Grècia clàssica on ja es distingia entre *l'epistêmê* i la *technê*, entre saber el què i saber el com, entre teoria i pràctica. Aquesta visió, que impregna en bona part els textos i les pràctiques docents, no ajuda gaire els aprenentatges profunds i competencials basats en la resolució de problemes i la realització de projectes.

I no ajuden perquè, presentats d'aquesta manera, els coneixements no tenen història i s'ignoren els problemes que els van originar, de manera que l'alumnat no té cap més opció que comprendre la teoria i memoritzar-la, per després demostrar que l'ha entès tot resolent problemes que sovint estan referits a la pròpia teoria. És un bucle que reforça el saber pel saber, amb molt poc atractiu per als genis cognitius, sempre disposats a arriscar-se per emprendre projectes, si el context escolar ho permet i ho facilita.

2. Tanmateix, hi ha prou investigacions i estudis en l'àmbit de la filosofia de la ciència que no situen el centre de gravetat en el coneixement ja elaborat i estructurat sinó en el procés de creació que l'ha generat, des de la perspectiva metodològica, històrica i cognitiva (Poincaré, 1908; Kuhn, 1962; Hempel, 1965; Hesse, 1966; Feyerabend, 1970; Popper, 1972; Lakatos, 1976; Nersessian, 2008; Hofstadter i Sander, 2013).

Així, doncs, darrere d'un coneixement qualsevol sempre hi ha una història creativa que l'ha fet possible, i és el punt de referència per empeltar una didàctica de l'aprenentatge. La creació de coneixement científic i tecnològic sempre s'ha plantejat com una resposta creativa a un problema.

Devem a K.R. Popper (1972) la formulació d'una epistemologia que concep el mètode científic com un procés de resolució de problemes en què la formulació de temptatives i l'emergència i l'eliminació d'errors tenen un paper clau en la producció de coneixement científic. No hi ha millor equivalent filosòfic per a l'aprenentatge per assaig i error que l'esquema bàsic de l'anomenada epistemologia del realisme objectiu:

$$P_0 \rightarrow TT \rightarrow EE \rightarrow P_1$$



A partir d'un problema o una pregunta inicial ( $P_0$ ), els científics elaboren una teoria temptativa (TT) que intenta resoldre'l, però quan aquesta teoria es posa a prova mitjançant un procés de falsabilitat (de falsar: invalidar una hipòtesi, una teoria, etc., mitjançant una observació o un experiment) n'emergiran errors i contradiccions, de manera que l'eliminació d'errors (EE) constituirà un nou problema ( $P_1$ ) la solució del qual mena a una nova teoria, i així continua repetint-se el cicle creatiu, perquè el coneixement científic és un sistema obert. L'epistemologia de Popper és un elogi i una apologia de la fertilitat dels errors en el progrés històric del coneixement. Tot i això, la simplicitat d'aquest esquema té un reflex més complex en la història de la ciència.

L'analogia d'aquest esquema amb l'aprenentatge per assaig i error salta a la vista, i de fet inspira bona part d'aquest assaig. En definitiva, les teories temptatives no deixen de ser heurístiques complexes o assajos que intenten resoldre problemes. Al cap i a la fi hi ha una arrel comuna en tots els processos cognitius, des dels més complexos, que s'ocupen d'investigar la naturalesa o d'innovar la tecnologia, fins als aprenentatges més bàsics dels infants: tots els fa el mateix geni cognitiu.

## Muntant i desmuntant coneixements

En la fabricació o construcció d'un objecte qualsevol, els materials, els instruments, els procediments, els plànols, etc. que hi han intervingut durant la fabricació són enretirats i sovint no en queda cap constància, de manera que de vegades és tot un misteri entendre com allò s'ha pogut fer. Només si disposem del com-s'ha-fet ens podem fer una idea concreta de com s'ha fet. Al capdavant queda l'objecte amb la seva estructura racional implementada en un suport bé sigui material o simbòlic, però en tot cas llest per usar-se socialment o replicar-se, si és el cas.

Devem a J. Piaget (1975) la formulació d'un model epistemològic que relaciona les accions cognitives del subjecte, com a protagonista i constructor de coneixements concrets, amb l'estructura lògica que posseeixen aquests coneixements com a objectes. Ja ho he apuntat al capítol 2, a l'apartat «L'eina recursiva del geni».

Si es parteix de l'evidència que qualsevol coneixement mínimament complex està format per d'altres més simples, ja tenim la primera eina per desmuntar-lo. Les altres dues eines són els conceptes d'**observable** i de **coordinació**, que també he apuntat.

Per **observable** ( $obs_n$ ) s'entén tot allò que un subjecte percep de l'objecte amb el qual es relaciona amb una finalitat cognitiva. Però atenció, sabem que la percepció d'un objecte sempre depèn de l'experiència cognitiva acumulada per cada subjecte particular. Recordeu que no és el mateix mirar que veure. Precisament, el model de l'epistemologia genètica defineix el mecanisme mental que opera mentre s'elabora la representació cognitiva dels objectes. Els observables són, doncs, les peces (més simples o més complexes), amb què bastim l'estructura cognitiva dels objectes que volem conèixer. Al capdavant, un objecte és percebut pel subjecte com un observable global, en el qual nien tots els observables que hi estan relacionats, que l'experiència cognitiva del subjecte ha construït al llarg del temps.

En canvi, les **coordinacions** ( $coord_n$ ) són inferències o raonaments lògics, explícits o implícits, que realitza el subjecte sobre els observables que percep de l'objecte, el resultat dels quals, si fructifiquen, crearan un nou observable en què niarà l'anterior. En definitiva, són relacions de tota mena aportades per l'activitat creativa del subjecte que sobrepassen les fronteres de l'observable de partida. Les coordinacions són fruit

dels instruments cognitius que maneja el subjecte, de manera que depenen molt de les competències intel·lectuals que ha desenvolupat el subjecte. Atès que els coordinables estableixen connexions de tota mena entre els elements que constitueixen els observables, és obvi que sobrepassaran les regles estrictes de la lògica i estaran obertes a qualsevol mena de connexió que pugui aportar un lligam cognitiu.

En resum, observables i coordinacions s'empaqueten<sup>35</sup> en un nou observable mitjançant un procés de naturalesa recursiva, que pot resumir-se mitjançant la formulació següent (Foerster, 1977):

$$\text{coord}(\text{obs}_n) \rightarrow \text{obs}_{n+1}$$

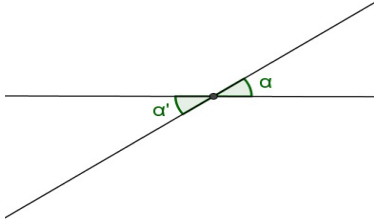
Els observables actuen com les peces d'un mecano que es poden muntar o connectar de maneres diferents; aquestes connexions serien les coordinacions.

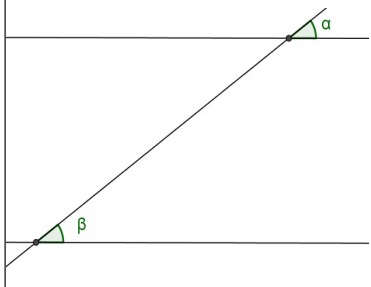
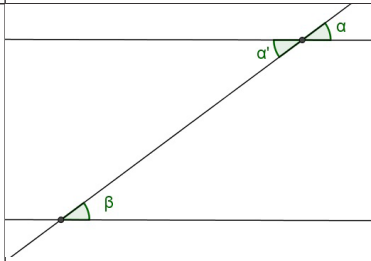
Evidentment no hi pot haver discrepàncies entre l'estructura lògica de l'objecte i la construcció cognitiva que fa el subjecte. El que marca la diferència entre l'estructura d'un coneixement i la respectiva construcció cognitiva és que la primera es relativa a un objecte i la segona, a un subjecte. L'estructura queda articulada mitjançant proposicions lògiques i regles d'inferència mentre que la construcció cognitiva es fa mitjançant coordinacions de les percepcions observables.

En resum, si es té modelat el coneixement d'aquesta manera es pot fer un seguiment exhaustiu del procés cognitiu de l'alumne i diagnosticar en quins observables o en quines coordinacions es produeixen errors.

Vegem-ne un exemple senzill amb un teorema clàssic de la geometria plana: dues rectes paral·leles tallades per una secant formen angles alterns interns iguals. Aquest coneixement (objecte 3, figura 6.5) està format per dos coneixements més elementals: el teorema de la igualtat entre angles oposats (objecte 1, figura 6.3) i el postulat de la igualtat d'angles corresponents (objecte 2, figura 6.4). He obviat la demostració formal d'aquest últim teorema,<sup>36</sup> ja que en l'àmbit perceptiu és directe i evident cosa que no cal en el cas del postulat dels angles corresponents.

El subjecte, per reeixir en la construcció cognitiva d'aquest teorema, coordina els observables 1 i 3 mitjançant una deducció lògica. D'una manera anàloga, l'estructura lògica d'aquest coneixement (objecte 3) la formen tres preposicions i una deducció.

	Objecte	Accions cognitives del subjecte
1		<p>obs0: <math>\alpha</math> i <math>\alpha'</math> són angles oposats.</p> <p>coord1 (obs0) <math>\rightarrow</math> obs1</p> <p>obs1 : <math>\alpha</math> i <math>\alpha'</math> són iguals</p> <p>Figura 6.3</p>

	Objecte	Accions cognitives del subjecte
2		<p>obs2: <math>\alpha</math> i <math>\beta</math> són angles corresponents</p> <p>coord2 (obs2) <math>\rightarrow</math> obs3</p> <p>obs3: <math>\alpha</math> i <math>\beta</math> són iguals</p> <p>Figura 6.4</p>
3		<p>obs4: <math>\alpha</math>, <math>\alpha'</math> i <math>\beta</math></p> <p>coord3 (obs1, obs3) <math>\rightarrow</math> obs4</p> <p>obs4: <math>\alpha'</math> i <math>\beta</math> són iguals</p> <p>Figura 6.5</p>

## La lògica no ho demostra tot

El paral·lelisme entre l'estructura lògica d'un coneixement i la seva construcció cognitiva segons els postulats piagetians no sempre és tan clara i simple com la que s'acaba d'exposar, sobretot pel que fa a les coordinacions.

Estirant l'exemple anterior, centrem-nos en un dels teoremes fonamentals dels triangles íntimament relacionat amb els que acabem de veure: la suma dels tres angles interns de qualsevol triangle és igual a  $180^\circ$ . Ja sabem que s'hi arriba de manera experimental retallant els tres angles d'un triangle de paper i posant consecutivament els tres angles sobre un sol vèrtex. Però el que es pretén és demostrar-ho.

Per demostrar-ho és imprescindible traçar una paral·lela a la base del triangle pel vèrtex oposat. Amb aquesta recta es formen dos angles ( $\beta'$  i  $\gamma'$ ), i recorrent al teorema dels angles alterns interns, observem que són iguals a  $\beta$  i  $\gamma$ . Així es dedueix que:  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ .

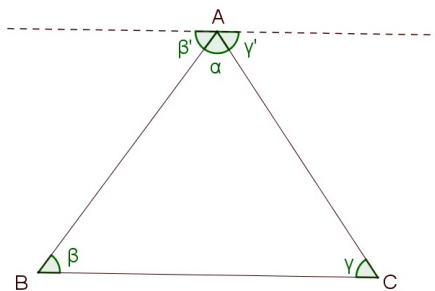


Figura 6.6

Centrem-nos en el traçat d'aquesta paral·lela i adonem-nos que no forma part del triangle inicial, és a dir, que no s'hi explicita. Tècnicament, aquesta paral·lela no consta com a hipòtesi inicial sinó que és una *hipòtesi auxiliar* que s'introdueix per tal de poder demostrar la tesi. És més, el fet d'introduir-la no és deduïble de les condicions inicials, no hi ha un raonament lògic que la pugui deduir a partir dels elements inicials del triangle. Amb aquesta paral·lela, però, la deducció funciona i és impecable.

Mirem-ho ara des del punt de vista de les accions cognitives del subjecte. La paral·lela tampoc és un observable inicial, ni tampoc és possible coordinar els observables explicitats per obtenir-la, però el subjecte la necessita per construir aquest coneixement. Aleshores, quina mena d'acció cognitiva ha generat la paral·lela? No és ni un observable ni una coordinació: només pot ser que una heurística, el producte d'una intuïció feliç.

Tot i que el model de l'epistemologia genètica que acabem d'exposar ens permet muntar i desmuntar un coneixement concret, cal matisar que aquest model només ens proporciona un manual d'instruccions de les peces del **kit**, és a dir, dels observables i les coordinacions que el constitueixen, però no conté cap mena de peça o d'instrucció per recordar o associar les heurístiques o intuïcions que li són pertinents. El mateix Jean Piaget reconeixia en una entrevista<sup>37</sup> que en la seva llarga trajectòria com a investigador no havia parat atenció als processos cognitius inconscients.

Quant a l'estructura lògica del coneixement s'esdevé el mateix: en el teorema que ens ocupa, el traçat de la paral·lela figura com a hipòtesi auxiliar i, per tant, se la situa fora de la demostració. En aquest cas, cal defensar que el traçat de la paral·lela més que una hipòtesi auxiliar és una hipòtesi fonamental de la demostració. Com ja he esmentat en el segon i tercer capítol, les heurístiques, que són la base de les hipòtesis, cauen fora del control de la lògica deductiva, de manera que aquesta disciplina, per molt bona fama que tingui, no funciona en els processos cognitius que creen coneixement científic, per bé que, una vegada assolits, contribueix notablement a estructurar-los i a objectivar-los.

## L'aprenentatge per assaig i error

La figura 6.7 modelitza l'aprenentatge per assaig i error. Fusiona el model que he exposat al capítol anterior (figura 6.9) sobre el pas de l'error al coneixement i l'esquema de la creació científica que acabo d'exposar.

En la part ombrejada hi distingim:

- Pi : És la definició del problema inicial que s'afronta, la pregunta que es formula o el projecte que s'entoma.
- $H \rightarrow A$ : Són les heurístiques mobilitzades per solucionar el problema. Recordeu que les heurístiques són regles d'acció cognitives que no són deduïbles d'uns postulats o principis lògics, sinó que són intuïcions elaborades per processos cognitius implícits i inconscients. Si els alumnes no les generen *per se*, sempre les hi podem inspirar. Recordeu també que d'una heurística se'n sol derivar una acció algorítmica.

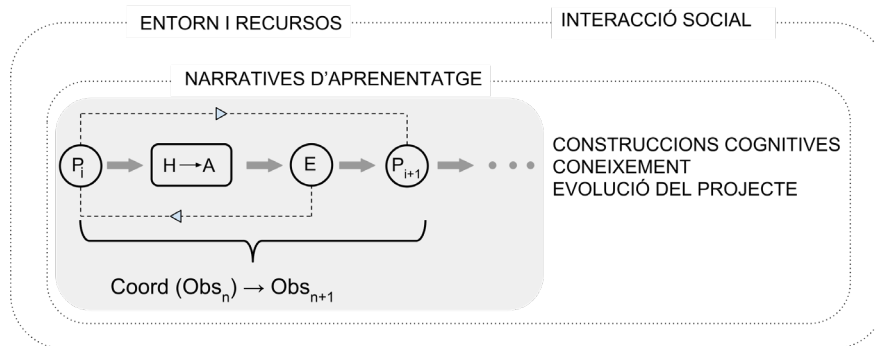


Figura 6.7

- E: Emergència d'errors, de la qual ja n'he parlat a bastament en els dos capítols anteriors. De fet, són derivades de les heurístiques errònies. Però quan el subjecte en pren consciència, de manera espontània engega un procés racional d'avaluació per rectificar-les o esmenar-les, un procés que genèricament es coneix com a «control cognitiu».
- $P_{i+1}$ : En el cas dels problemes tancats, en general, la resolució de l'error genera una nova heurística de resolució del problema original; en canvi, si són oberts, la resolució de l'error pot comportar una modificació de l'enunciat del problema original. És per això últim que en l'esquema del binomi assaig i error s'inclou una **retroacció** que va des de l'error (E) cap al problema original ( $P_i$ ), i una **anticipació** que renova o modifica el problema original ( $P_{i+1}$ ) i fa evolucionar el projecte.
- $\text{Coord}(\text{obs}_n) \rightarrow \text{obs}_{n+1}$ : Tal com s'ha explicat a l'apartat corresponent, la producció d'heurístiques i el control cognitiu no seria possible sense la percepció d'observables i de les coordinacions entre ells, de manera que cal integrar-los de manera paral·lela al procés d'assaig i error. A més, esdevindran els components cognitius de l'estructura del coneixement generat.

El model presenta un procés lineal que pretén ser autoregulat i que pot prolongar-se i sostenir-se en el temps. És obvi que representa el punt de vista del subjecte que aprèn. Per bé que no està especificat, és clar que el conjunt del procés d'aprenentatge està regulat pel professor, ja que estem situats en el context escolar.

Però hi ha més factors que tot i que estan en la perifèria del procés individualitzat no tenen una importància secundària. En primer lloc, el procés d'aprenentatge té lloc en el marc d'una narrativa. Més enllà, en una segona òrbita, com englobant el nucli de l'aprenentatge, trobem l'entorn amb els seus recursos i, finalment, tot plegat es desenvolupa en un context social en el qual els nois i les noies interactuen.

Vegeu amb més detall cadascun d'aquests factors.

## Narratives per a l'aprenentatge

Qualsevol docent, i gosaria dir que tothom que ha passat per les aules, sap que malgrat que la lliçó sigui la mateixa, no s'aprèn de manera uniforme per tothom. Només cal veure el conjunt d'errors relatius a un mateix aprenentatge per assumir que qualsevol pla de lliçó està condicionat per la realitat de la diversitat cognitiva, amb independència dels seus postulats pedagògics.

El model té les seves forteses i les seves debilitats, i d'aquí en trauré el component que el completa.

Davant d'un problema inicial, el conjunt d'errors ens informa del conjunt d'heurístiques en joc: a cada error li correspon una heurística llençada per un alumne contra el problema en qüestió. Quant a l'avaluació de l'error i a l'extracció de nou coneixement a partir d'aquest error, aquest error també està subjecte a la diversitat, de manera que d'un mateix error s'observaran processos d'avaluació diferents. Fins i tot, en el cas dels problemes oberts, de reeixir les temptatives, la diversitat també aflorarà en la redefinició del problema inicial.

La fortalesa del model es revela en què cadascun dels conceptes bàsics (H, E i  $P_{i+1}$ ) aixopluga una gran varietat de produccions cognitives de l'àmbit científicotècnic. Però l'anàlisi d'una producció cognitiva concreta no sempre és evident i ni és ràpid identificar l'heurística que la produeix. Els errors, si n'hi ha, són més evidents. La principal debilitat és que sovint les heurístiques no s'evidencien amb claredat i cal destil·lar-les dels errors, i ja se sap que les interpretacions poden generar polèmica.

La diversitat cognitiva impregna tot el model i el dota de plasticitat. Aquest fet és un valor en ell mateix que cal destacar, ja que modela relats d'aprenentatge personalitzats. Tothom recorda episodis del seu aprenentatge escolar, per bé que aquesta no és una memòria que s'exerciti sovint. Si s'agafen les produccions cognitives de les noies i dels nois, amb una mica d'expertesa i sense l'objectiu de qualificar-los sinó d'examinar-los atentament i sense prejudicis acadèmics, copsarem en cadascun d'ells la narrativa de com s'ha desenvolupat l'aprenentatge. Tant els que han reeixit com els que no s'han completat tenen d'un relat propi. Què fem, si no, quan els comentem els seus aprenentatges de manera personal?

Qualsevol aprenentatge, per molt insignificant que pugui semblar, implica una narrativa que es pot formular en termes d'heurístiques, d'errors i d'avaluació d'aquests errors, de manera que aquesta visió és una peça obligatòria per integrar en el model.

No se'ns pot escapar un fet: quan planifiquem una lliçó amb aquests o altres postulats pedagògics, construïm una narració cognitiva. Més o menys avorrida o motivadora, ben cert, però narració al cap i a la fi. Una diferència clara amb les que protagonitzen els nostres alumnes és que les nostres són narratives prototípiques, com cèl·lules mare que s'han de diferenciar segons els seus receptors.

Per últim, cal diferenciar aquestes narratives de les que presenten o expressen el problema, la pregunta o el projecte que es vol desenvolupar sota la forma de relat. Aquestes són diferents de les narratives d'aprenentatge i tenen una funció pedagògica molt definida ateses les implicacions emocionals que impliquen i també perquè proporcionen un significat amb els aprenentatges ja que els connecta amb una realitat, en el ben entès que qualsevol ficció també és una realitat essencial del nostre imaginari col·lectiu i personal.

## L'entorn d'aprenentatge i els recursos

De bon començament he centrat aquest assaig en els àmbits de l'educació científica, tecnològica i matemàtica, i per extensió en l'enginyeria i el disseny. Com que la major part dels projectes didàctics d'aquestes àrees impliquen l'experimentació, l'ús de recursos tecnològics i materials és una necessitat. Fins i tot, si se m'apura, determinades activitats exclusivament mentals, que només mobilitzen paper i llapis, entren en la categoria d'activitats experimentals, si la seva finalitat no està limitada a la memorització.

Tot això fa que l'entorn físic estigui ple d'eines, materials i recursos tecnològics. Els tradicionals laboratoris i tallers de tecnologia acaben fusionant-se en entorns d'aprenentatge tecnocientífic en què l'organització i el disseny de l'espai de treball i dels recursos es posa al servei de la dinàmiques de treball en equip que cerquen sempre ergonomies eficients que les facilitin.

Junt amb la interacció social, la dels recursos de l'entorn configura el context en què es desenvolupa amb més naturalitat i comoditat l'aprenentatge per assaig i error. Tanmateix, la profusió i l'abundància de recursos no és una condició necessària per a la creativitat didàctica ni garanteix per ella mateixa una bona qualitat dels aprenentatges. El centre neuràlgic de la creativitat seguirà estant en el disseny didàctic, en el pensament pedagògic.

## La interacció social

Els punts anteriors modelen el procés cognitiu d'un subjecte ideal o teòric, despersonalitzat i descontextualitzat. No podem ignorar que l'aprenentatge escolar s'esdevé en una aula, en un grup humà, de manera que hi haurà, en major o menor grau, i depenent de la pràctica docent, interacció social. Per molt que determinades pràctiques docents s'entestin a individualitzar els aprenentatges dels alumnes, els nois i les noies es comuniquen les seves experiències cognitives. Si, pel contrari, la pràctica docent assumeix i fomenta un aprenentatge socialitzat i col·laboratiu, la influència de la interacció social en els aprenentatges personals esdevindrà un factor determinat a tenir present, per això s'inclou en el model que exposaré tot seguit.

Així, pràctiques escolars com la pluja d'idees, la gamificació (ludificació) o el treball col·laboratiu que fomenten la interacció social i cognitiva entre els nois les noies tindran una influència més que notable en els seus aprenentatges. Per emfatitzar la importància de la dimensió social l'he col·locada com a context global. Des d'aquesta perspectiva, l'aula esdevé un ecosistema sociocognitiu on interactuen simultàniament uns quants actors, professors inclosos.

## La profunditat del model

El model pren més consistència si es té present el temps. Introduir la variable temporal significa referir-se a un ampli conjunt d'aprenentatges relacionats entre ells, de manera que els uns se succeeixin als altres.

En aquest supòsit, la cadena  $P_i \rightarrow (H \rightarrow A) \rightarrow E \rightarrow P_{i+1} \dots$  s'allargaria i la lectura del model seria poc pràctic, però si la pleguem en forma d'espiral i fem coincidir els tres components bàsics obtenim una representació de geometria més clara i estratificada

(vegeu la figura 6.8). El fet de superposar els tres components bàsics (P, H, E) els reforça com a eixos centrals de l'aprenentatge per assaig i error.

És important entendre que aquests estrats cognitius representen els aprenentatges, reeixits o incomplets. És cert que es dipositen en la memòria profunda, seu de l'inconscient cognitiu, però no s'estratifiquen a la manera d'una memòria geològica, perquè la nostra és una memòria viva i profusament líquida i associativa, que flueix per les xarxes neuronals i en les quals el conscient cognitiu hi pesca les heurístiques.

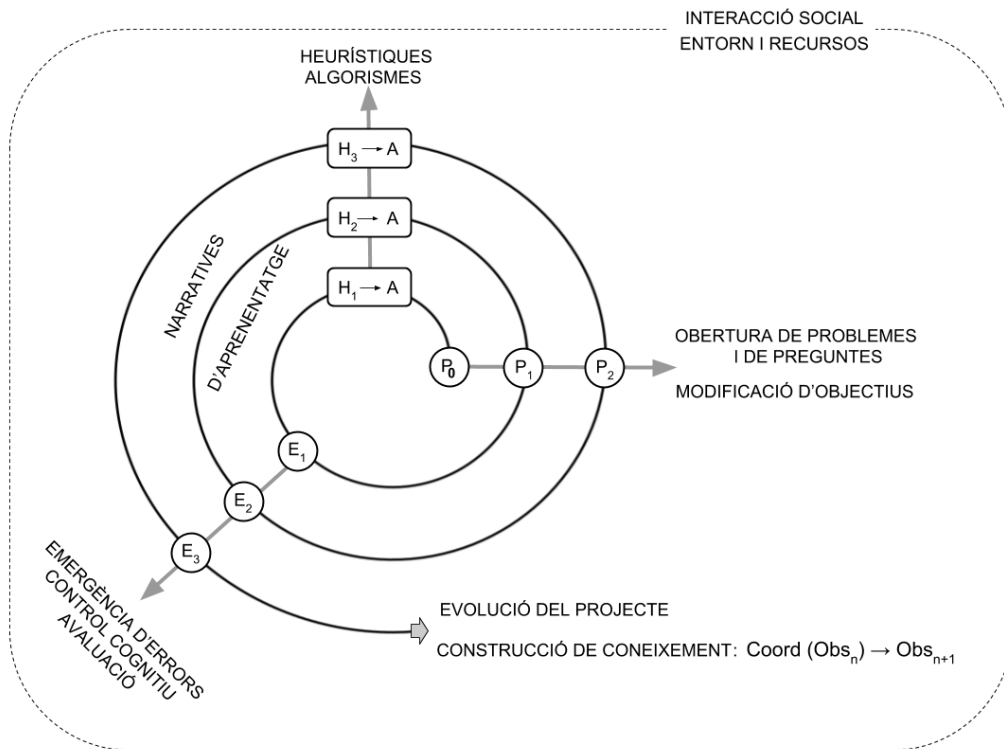


Figura 6.8



# 7

## De la idea al projecte

*Les idees produeixen coneixement i les ments humanes —de forma molt misteriosa— creen idees. Qui ho voldria d'una altra manera?*

Theodore Roszak (1933-2011)

Un apunt previ. Pot semblar excessiu aplicar el concepte de projecte a determinades activitats que es fan a les aules de les escoles de primària i de secundària. Aquesta opinió només se sosté quan aquest concepte es limita als àmbits tècnics i professionals. No obstant això, una mirada més oberta copsarà diferències i semblances molt clares entre els projectes que entomen uns adolescents i els dels professionals.

En el seu significat més genèric, per projecte s'entén el que es **pensa** fer i que es concreta en un disseny i en una planificació. I sense sortir d'aquest contorn semàntic, un projecte comença quan es concep o s'imagina una idea amb la voluntat de dur-lo a la pràctica. I això és aplicable a qualsevol mena de projecte, tant si es produeix en el context escolar com en el professional.

Tal com els entenc, en els projectes que ideen els nois i les noies és desenvolupen **idees mare** a través d'un procés d'aprenentatge per assaig i error guiat pels docents. En aquestes poques paraules hi desemboca tot el que he exposat al llarg d'aquest assaig.

En aquest context, el paper del professorat se centra, bàsicament, a guiar, facilitar i assessorar l'aprenentatge de l'alumnat, que n'és l'autèntic protagonista. De l'aula estant, sovint se'm sent dir jo només soc el vostre entrenador, jo no jugo el partit, els gols els marqueu vosaltres.

Què entenc per una idea mare? Com qualsevol altra idea que processa la nostra ment, les idees mare també són simples, genèriques, poc concretes i de poca complexitat cognitiva. Comencen com una idea comuna, talment una categoria (per exemple, cotxe, taula, vestit, etc.), però l'adjectiu mare indica que segons la idea, el subjecte que la pensa li confereix el poder d'esdevenir una matriu, com una cèl·lula mare que té la capacitat de desenvolupar-se i diversificar-se fins que forma alguna cosa concreta i real (**vull fer** un cotxe elèctric, una taula d'estudi, un vestit esportiu, etc.).

El tipus d'idees mare que s'exposen en aquest assaig, que podem reformular com idees STEAM, no impliquen cap mena de genialitat ni cap talent ni tampoc una competència especial, en tot cas, les heurístiques brillants, si es produeixen, sorgiran durant la realització del projecte, perquè aquesta és la característica principal de la idea mare: la de **projectar-se** cap endavant i materialitzar-se fins esdevenir una realitat concreta més o menys reeixida.

Des del punt de vista de l'alumnat, una idea mare és una fita que s'assolirà transitant col·lectivament per una via cognitiva inèdita, un via farcida d'assajos i errors, d'èxits i fracassos i encerts, però, en tot cas, sempre emocionant. El projecte, doncs, serà tot el que s'esdevingui dia rere dia mentre es du a terme.

Des de la perspectiva docent, el repte és guiar i facilitar l'aprenentatge per assaig i error, i això només és possible si es maneja un model cognitiu del coneixement implicat en un projecte. Sense fer-nos una idea de què els passa pel cap mentre aprenen no és possible guiar-los, en tot cas, només es pot «ensenyar», en el sentit literal de la paraula, i amb això que dic no menystinc l'aprenentatge per imitació, simplement que no el tracto aquí.

Per descomptat, els processos cognitius que he exposat al llarg d'aquest assaig són una aproximació a les realitats mentals i segurament els he fonamentat d'una manera molt precària, però, i amb això no vull justificar-me, la psicologia cognitiva encara té molt camí per córrer i per explicar, de forma concisa i científica, com es produeix un aprenentatge escolar concret, com els que he anat exposant al llarg d'aquest assaig.

A tall d'exemple, el que s'intenta en aquest capítol és «modelar» **tres projectes** amb les eines didàctiques que proporcionen la teoria i els conceptes que he anat desgranant al llarg dels capítols anteriors, perquè si no pot fer-se d'una manera mínimament fonamentada i coherent, no haurà servit de res l'esforç d'escriure aquestes pàgines i, per descomptat, de llegir-les.

Quan un noi afronta un problema determinat, en les seves accions i produccions hi hem de veure reflectides i diferenciades les activitats de la ment autònoma, de la ment executiva i de la ment reflexiva. Així, per interpretar les produccions cognitives de l'alumnat prendrem tots els conceptes que he anat explicant: l'analogia, les heurístiques, les execucions algorísmiques, els biaixos cognitius, les temptatives cognitives, l'avaluació com a procés d'emergència i identificació d'errors, l'eliminació d'errors com a problema que nia en l'original i que inspira noves temptatives cognitives per reformular el problema inicial. I tot això immers en el context d'una epistemologia que identifica la construcció de coneixement amb la resolució de problemes.

Es tracta, doncs, de perfilar una mena de via cognitiva per a cada projecte per la qual els nois i les noies han de transitar-hi. Tot un exercici d'**enginyeria cognitiva**. Així és com m'agrada pensar la didàctica.

Una última nota: en aquests tres projectes que s'exposen tot seguit i que venen a ser la conclusió de tot l'assaig, no hi trobareu ni la gestió d'aula, ni el disseny de l'entorn d'aprenentatge, ni els textos o materials didàctics adreçats a l'alumnat. Es tracta, simplement, del marc general d'una didàctica de l'aprenentatge.

## Programant planetaris

### La idea

Una sola imatge animada és suficient per visualitzar la idea que es vol dur a terme: un sistema planetari format per una estrella, un planeta que orbita al seu voltant i un satèl·lit que orbita al voltant del planeta; com el sistema Sol-Terra-Lluna. Tothom té al cap la imatge del sistema solar, forma part de la nostra cultura. El problema, doncs, consistia a programar-la amb Scratch. Si no coneixeu aquest entorn consulteu aquesta nota<sup>38</sup>.

Vaig plantejar el projecte a primer d'ESO. Cal dir que la classe ja estava familiaritzada amb aquest entorn de programació. Anteriorment, havien programat la trajectòria circular d'un objecte que dibuixava la seva trajectòria. Cal afegir que també havien navegat amb el simulador del sistema solar Celestia<sup>39</sup> (figura 7.1) i que també havien muntat planetaris mecànics cosa que permet fer i expressar la mateixa idea en versió informàtica i mecànica, la qual cosa és molt enriquidora.

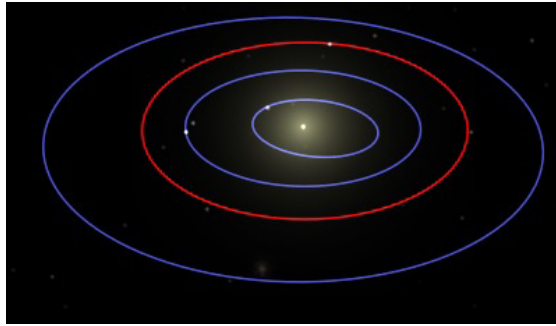


Figura 7.1. Font: <<http://celestia.es>>

### Primera temptativa (H → A)

Per simplificar el projecte vam partir del fet que les òrbites serien circulars, i que primer programaríem la Terra orbitant al voltant del Sol i després faríem que la Lluna orbités al voltant de la Terra. Així, situat el Sol al centre de la pantalla, els nois i les noies havien de programar que l'objecte Terra girés al voltant del Sol.

Les heurístiques que cabia esperar mobilitzaven l'aprenentatge esmentat abans: un objecte que traça una circumferència. En el seu moment, l'aprenentatge d'aquest algorisme va requerir de la seva heurística particular. Una vegada més es palesa que la construcció d'un coneixement concret utilitza com a components altres coneixements. Per analogia, la Terra seria aquest objecte i el Sol, el centre de la circumferència. Aquesta heurística, que es pot catalogar com una heurística del prototip, va consistir a dibuixar els objectes Terra i Sol, i programar que la Terra (vegeu la figura 7.2):

1. Baixí el llapis
2. Avanci uns passos
3. Giri (a dreta o esquerra) uns graus
4. Repeteixi aquests dos blocs últims fins a completar la circumferència.

Tal com està pensat aquest programa, per situar el Sol al centre de l'òrbita cal fer-ho a ull.

Com que el programa funciona tal com s'espera que ho faci, i l'òrbita de la Lluna és semblant a la de la Terra al voltant del Sol, però més petita, molts van pensar (segona heurística) que si programa que fa orbitar la Terra funciona bé, es podia usar per fer que la Lluna orbiti al voltant de la Terra, i que, a tot estirar, només caldria ajustar-li el pas i el gir. I això és el que va fer bona part de la classe.

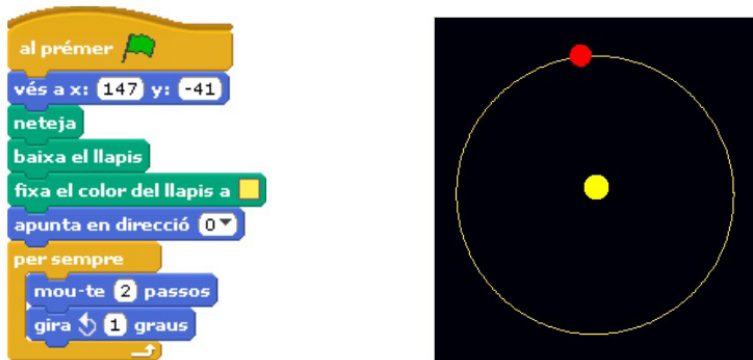


Figura 7.2. Vegeu la simulació interactiva a: <https://scratch.mit.edu/projects/1764653/#fullscreen>

### L'emergència de l'error

Som davant d'un cas d'una heurística de l'analogia errònia. En executar el programa immediatament va emergir l'error de la segona heurística: la Lluna anava a la seva i no seguia la Terra sinó que es quedava al mateix lloc tot dibuixant una circumferència, mentre que la Terra feia la seva (vegeu la figura 3). No volíem això! L'error se situava en haver donat per fet que el programa per a la Lluna devia de ser el mateix que el de la Terra. Més endavant es veurà que l'error no és ben bé aquest, però de moment es pensava això i feia el fet.



Figura 7.3. Vegeu la simulació interactiva a: <https://scratch.mit.edu/projects/1764655/#fullscreen>

### Identificar l'error: el nou problema

D'aquest error se'n treu el coneixement que la Lluna ha de fer dues accions simultànies: seguir la Terra a la vegada que orbita al seu voltant.

Vaig proposar a la classe que examinessin altres blocs d'Scratch, per si de cas en trobaven algun que «seguís un objecte», de manera que es podria incorporar al programa. Molts alumnes van posar l'atenció en el bloc «Ves a...». Així que van provar d'afegir-lo al programa de la Lluna. Això genera una nova heurística del prototip, ara amb aquest nou bloc; vegeu la figura 7.4.



Figura 7.4. Vegeu la simulació interactiva a: <https://scratch.mit.edu/projects/15679519/#fullscreen>

### L'emergència de l'error

L'error va tornar a aparèixer en executar el programa: la Lluna seguia la Terra, però no orbitava al seu voltant, sinó que se situava a sobre (figura 7.4).

Per molt que s'hi esforçaven, no estaven preparats per identificar en què consistia l'error, llevat que compreguessin la física bàsica d'una òrbita planetària i que, en conseqüència, que reformulessin el programa.

És obvi que els havia portat intencionadament a un atzucac i que no estaven preparats per resoldre aquest conflicte cognitiu: els faltaven recursos cognitius i ja no podien generar heurístiques.

La situació permetia conèixer millor què és una òrbita planetària, i admetre que no és una simple circumferència (o una el·lipse), sinó que és la trajectòria generada per la interacció de dues forces: entre la força de la gravetat del Sol cap a la Terra i la inèrcia d'aquesta a seguir en línia recta, és a dir, a escapar-se per la tangent. Amb aquest coneixement ens adonem que l'error consisteix a creure que la trajectòria d'una òrbita planetària respon a una hipotètica voluntat del planeta per seguir un trajecte circular. Per prendre consciència de quin era l'error calia tenir aquest coneixement.

### Ampliant el coneixement de les òrbites planetàries

Hi havia un motiu de pes per aturar momentàniament la vessant informàtica del projecte i dedicar un temps al concepte físic d'òrbita planetària.

Per simular la inèrcia de la Terra o de la Lluna a continuar la seva trajectòria en línia recta n'hi ha prou amb un got de vidre transparent capgirat i fer rodar una bola a l'interior. En alçar el got, la bola surt disparada en línia recta (figura 7.5, esquerra). Es pot fer punteria i representar geomètricament l'observació que per fer diana cal alçar el got just quan la bola passa per una de les tangents de la diana amb la circumferència.

És el principi de la fona. Els nois i les noies van fer punteria amb un programa que simula el llançament d'una pedra amb una fona.<sup>40</sup> També es pot visualitzar la curvatura de la trajectòria d'una bola d'acer sotmesa a una força d'atracció fent-la passar a prop

d'un imant convenientment situat (figura 7.5, dreta). A més d'aquestes experiències, també poden posar satèl·lits en òrbita amb simuladors.<sup>41</sup>

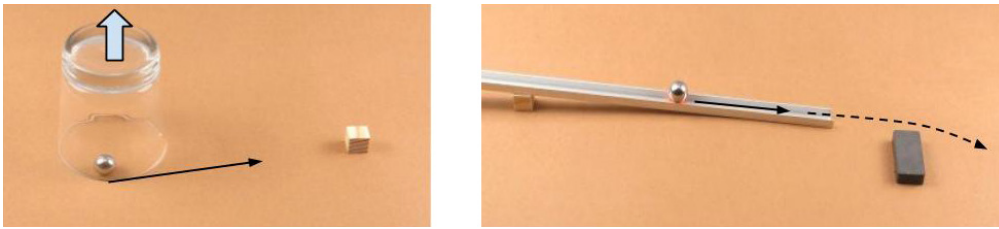


Figura 7.5

A partir d'aquests coneixements es pot representar amb Geogebra la construcció dinàmica d'una òrbita<sup>42</sup> (figura 7.6) i fins i tot representar-ho físicament tot emulant els passos de la construcció geomètrica:

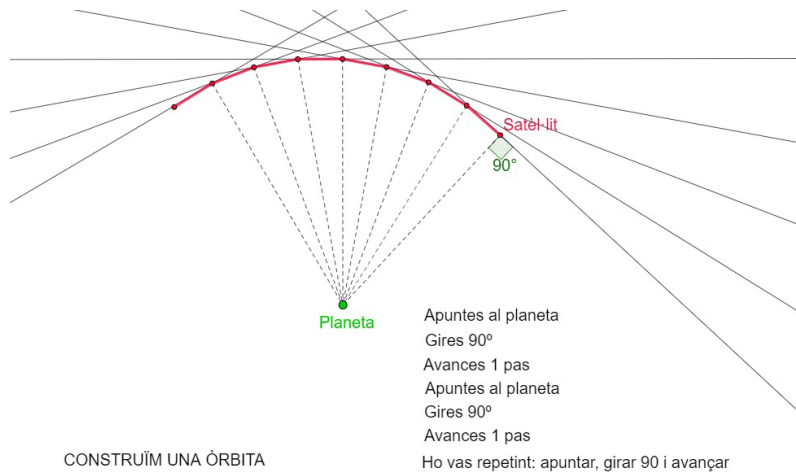


Figura 7.6

El cas és consolidar aquest coneixement amb diferents experiències cognitives de tal manera que s'identifiqui que l'error que ens ocupava era causat per una mancança cognitiva. Una vegada més es confirma el principi ja esmentat en diversos moments d'aquest assaig: la identificació d'un error, és a dir, el coneixement de saber què l'ha causat, possibilita una nova temptativa per resoldre el problema original. De fet, el coneixement de l'error el redefineix.

### La redefinició del problema

Així, doncs, el problema renovat consisteix a programar una òrbita en clau física. És a dir, programar d'alguna manera la força de la gravetat del Sol que atrau la Terra i la tendència d'aquesta a escapar-se per la tangent. És a dir, que la Terra haurà d'apuntar cap al Sol per anar-hi, però immediatament haurà d'avançar una mica en línia recta seguint la tangent i, per fer-ho, abans haurà de girar 90°, i així contínuament.

Vam examinar de nou el repertori de blocs per si en trobàvem alguns que fessin aquestes accions. Vaig cridar l'atenció sobre el bloc «Apuntar cap a...». Comptant aquest, eren tres els blocs que calia posar en joc per programar l'òrbita: apuntar, avançar i girar 90°.

En aquest punt es va definir bé el nou problema: ordenar aquests tres blocs de tal manera que fessin orbitar la Terra al voltant del Sol. Primer la Terra, i, si funcionava, després la Lluna.

### Noves temptatives (H → A)

No tothom se'n va sortir a la primera. Tornem a trobar-nos amb l'heurística de l'exploració, en aquest cas explorant quina de les combinacions dels tres blocs traça una òrbita (figura 7.7).

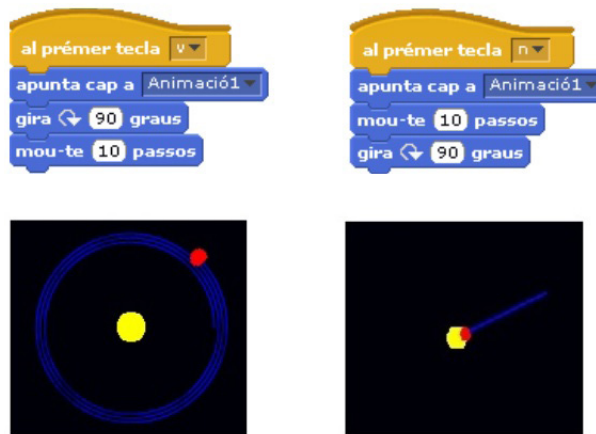


Figura 7.7. Vegeu la simulació interactiva a: <https://scratch.mit.edu/projects/1764735/#editor>

### Emergència i identificació d'errors

Amb el programa de la dreta (figura 7.7), la identificació d'errors és ràpida: la Terra es precipita sobre el Sol. La identificació de l'error és una qüestió d'ordre entre els blocs Mou-te i Gira. Si primer es mou la Terra, aquesta anirà directa cap al Sol; si després gira, es quedarà en la mateixa recta; i en la segona volta del bucle, seguirà apuntant a la mateixa recta d'abans, per tant, anirà directa cap al Sol.

En canvi, en el programa de l'esquerra (figura 7.7) tot va bé fins que la Terra completa la primera òrbita, però després s'observa que la Terra es va allunyant del Sol. Aquí sorgeix un nou error inesperat, però molt fèrtil, perquè comprendre'l derivarà en una experimentació interessant que originarà el problema següent. No obstant això, aquesta solució passa la prova de foc, ja que si es desplaça el Sol, la Terra s'hi adapta i hi continua orbitant.

De manera experimental vam observar que si la Terra gira 90° o més, s'allunya del Sol, i si el gir és inferior a 90°, s'hi va acostant. Un cop identificat l'error en aquests termes, de seguida s'entreveu quin és el problema.



## Redefinint una vegada més el problema

El nou problema consisteix, doncs, a aconseguir una òrbita estable, és a dir, que la Terra ni s'acosti ni s'allunyi del Sol; la clau de la solució rau a controlar la distància. Nou problema, noves heurístiques.

Vaig orientar l'atenció de la classe cap a un bloc de l'Scratch que mesura la distància entre dos objectes, de manera que vaig induir una heurística del raonament deductiu. Si es disposa de la informació constant de la distància que separa la Terra del Sol, se li pot canviar el gir de manera que si la distància augmenta, se li redueix el gir, i, si la distància disminueix, se li augmenta el gir (figura 7.8). Són condicions lògiques que els nois i noies ja coneixien d'altres programes.



Figura 7.8

Resolt l'últim problema del projecte només restava aplicar el programa de l'òrbita autèntica a la Lluna, tot canviant les referències dels objectes i explorant les quantitats que millor s'ajustaven a les dimensions de la pantalla.

Al capdavall, aquella primera intuïció inicial que els deia que el mateix programa que feia orbitar la Terra al voltant del Sol també havia de servir per a la Lluna era encertada. L'error no es trobava aquí sinó en la concepció de l'òrbita.

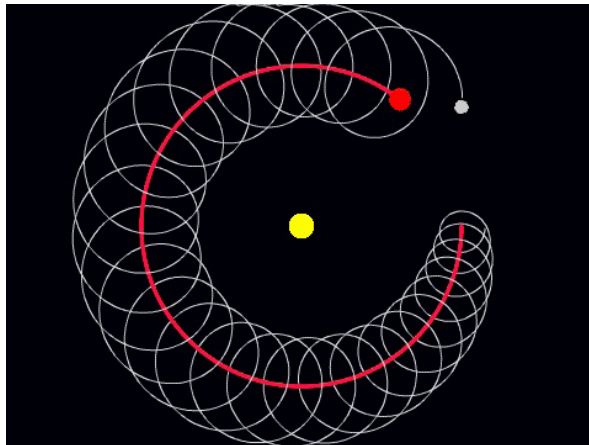


Figura 7.9. Vegeu la simulació interactiva a: <https://scratch.mit.edu/projects/1765171/#fullscreen>



## Les temptatives impredecibles dels alumnes

Tot el que hem vist és una concreció del model d'aprenentatge per assaig i error que anat exposant en aquestes pàgines. En la mesura que una estratègia didàctica concreta s'experimenta i es prova repetides vegades amb grups diferents d'alumnes, hi haurà noves heurístiques i nous errors per incorporar, de manera que l'esmentada estratègia agafarà més expertesa.

Tot i que l'expertesa d'una didàctica s'adquireix analitzant les produccions de l'alumnat, quantes més millor, sempre hi haurà temptatives sorprenents, que deixaran les portes obertes a la revisió permanent de les didàctiques. Vegeu-ne unes quantes:

- <https://scratch.mit.edu/projects/1554468/#fullscreen>  
Durant la primera temptativa, fa una animació amb fotogrames de la Terra-Lluna. Premeu primer la bandera verda i després la barra d'espai per iniciar el programa.
- <https://scratch.mit.edu/projects/1597841/#fullscreen>  
Redueix una mica l'angle i com que la Terra s'apropa molt a poc a poc, dona l'òrbita per estable. Premeu la bandera verda per iniciar el programa i la barra d'espai per veure la distància Terra-Sol.
- <https://scratch.mit.edu/projects/1692701/#fullscreen>  
Una obsessió per la precisió. Angle de gir de la Lluna de 80°, i funciona! Premeu la bandera verda per iniciar el programa.
- <https://scratch.mit.edu/projects/1574604/#fullscreen>  
Sorprenent! Sense usar les condicions lògiques de control, per tempteig aconseguix establir l'òrbita. Premeu primer la bandera verda i després la barra d'espai per iniciar el programa.
- <https://scratch.mit.edu/projects/1695226/#fullscreen>  
Una bona iniciativa que obre el projecte inicial ja que afegeix un satèl·lit a la Lluna, i deu n'hi do l'èmbolic que munta. Premeu primer la barra d'espai i després la tecla «a», per iniciar el programa del satèl·lit de la Lluna.

## Ampliant el projecte, noves idees

Un projecte didàctic no pot donar la sensació que tanca el coneixement que ha produït, perquè la visió del coneixement que ens interessa transmetre és la d'una construcció interminable en xarxa i col·laborativa, de manera que el guió didàctic del projecte ho ha de preveure.

En el projecte que ens ocupa, tornarem a la nau Celestia per centrar l'atenció en la forma el·líptica de les òrbites, en el conjunt de planetes que orbiten al voltant del Sol, en el satèl·lits de Júpiter o en qualsevol altre aspecte que cridi l'atenció de l'alumnat. El cas és obrir noves perspectives a partir del coneixement assolit.

## Pensar i fer un motor elèctric

Seguint el mateix fil del projecte anterior, en aquest també em centraré a precisar la dinàmica del procés d'assaig i error del projecte tot concretant els problemes i les heurístiques que es van generant a mesura que s'avança, tant en les construccions cognitives com en les realitzacions materials.

Aquest projecte forma part d'una proposta didàctica més amplia,<sup>43</sup> adreçada a l'alumnat de d'ESO, l'objectiu de la qual és conèixer una part fonamental de la tecnologia de la nostra civilització com ara la generació de l'energia elèctrica i els motors elèctrics.

Per descomptat, abans de començar aquest projecte cal conèixer les beceroles de l'electromagnetisme, començant per la descoberta d'Ørsted i continuant per la construcció d'un electroimant, coneixements imprescindibles per entomar aquest repte.

Cal advertir que estalviaré la part més executiva del projecte, és a dir, els procediments de construcció dels motors i la gestió d'aula, cosa que podeu consultar en el web esmentat a la nota 43. El que interessa ara és la descripció de la via cognitiva que desenvolupa la idea inicial.

### **(Re)Inventant el motor elèctric. Primera temptativa**

Es projecta la imatge de la figura 7.10 i se'ls planteja el repte següent: aprofitant tot el que sabeu d'imants i d'electroimants dissenyeu i construïu el giny electromecànic que fa girar un eix sense parar, és a dir, un motor elèctric. Vet aquí la idea inicial; poc concreta, sí, perquè no saben què hi ha dins la carcassa, però clara, perquè l'objectiu ho és. L'eix ha de voltar.

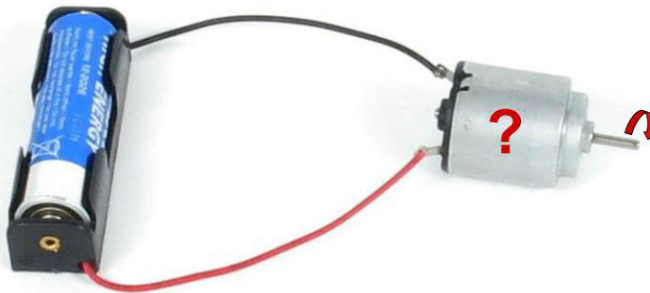


Figura 7.10

Recordeu que l'**heurística del prototip** recorre a un conjunt de coneixements i d'elements tecnològics per solucionar el problema plantejat. Bàsicament, són aquests:

- Es coneix què és una pila elèctrica i el sentit del corrent elèctric continu.
- Se saben muntar circuits elèctrics elementals.
- Se sap que si es canvia el sentit del corrent elèctric en un electroimant la seva polaritat magnètica canvia, és a dir, que l'extrem que és nord canvia a sud i viceversa.
- Es coneixen les forces d'atracció i repulsió entre pols magnètics, ja siguin d'imants permanents o d'electroimants.
- Es coneix la regla d'interacció entre pols magnètics: pols iguals es repel·leixen i pols diferents s'atrauen. I s'ha observat que la interacció implica un moviment.
- Es té una mínima experiència amb operadors mecànics.

Fomentar una pluja d'idees per estimular la ideació de prototips és una bona manera de començar aquest projecte. Cada idea que en surti, cal representar-la i sotmetre-la a la crítica, així fins obtenir-ne una que sembli que funcionarà (figura 7.11). Vet aquí l'esquema de la primera temptativa (heurística + algorisme).

- Un electroimant es fixa a un eix central de tal manera que pugui girar lliurement. Serà l'eix del motor.
- Aquest electroimant **rotor** se situa entre dos imants permanents fixos, amb pols diferents encarats.
- Si se sap com canviar el sentit del corrent de l'electroimant en els moments i en les posicions adequades, les forces d'atracció i de repulsió entre els pols dels imants i els de l'electroimant actuaran sobre l'eix rotor, de manera que aquest girarà.

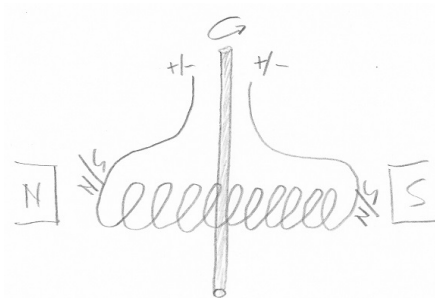


Figura 7.11

Com totes les heurístiques, aquesta també s'alimenta de pocs coneixements. Una ment més experta en aquest tema s'adonarà que el prototip té alguns problemes sense resoldre. Per exemple, que cal que l'electroimant estigui inactiu (que no rebí corrent) quan els seus braços passen per davant dels imants, ja que, si no, les forces entre els pols de l'imant i els de l'electroimant o bé el travarien, en el cas que fossin d'atracció, o bé el bloquejarien, en el cas de repulsió, perquè tant podria girar a la dreta com a l'esquerra. Però no ens avancem, primer es construeix el prototip (figura 7.12), i els problemes ja sorgiran amb més claredat quan es tingui el prototip al davant, ben tangible.

Recordeu que una idea no deixa de ser una categoria genèrica, per això acostuma a ser poc definida i concreta, de manera que l'heurística del prototip que se'n deriva, tot i ser més definida, tampoc abasta la totalitat de l'objecte que es pretén construir. Una temptativa cognitiva ( $H \rightarrow A$ ) sempre intenta reduir la ignorància, però eliminar-la tota d'entrada no és pas freqüent.

La construcció d'aquest prototip és un exemple de com les heurístiques mobilitzen accions executives (**algorísmiques**). Materialitzar la primera idea del motor elèctric, és a dir, desenvolupar-la com a projecte, implica l'**execució** d'un munt de procediments pràctics que van des de l'elecció dels materials a la confecció de les peces. Per descomptat que hi haurà errors per tot arreu, però avaluar i identificar què falla en una peça acostuma a ser clara i ràpida, ja que són errors de tipus eruptiu.

Finalment, el primer prototip de motor elèctric s'enllesteix aviat (figura 7.12).

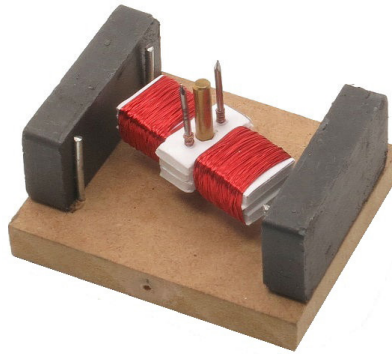


Figura 7.12

### El problema de les escobretes

El prototip inicial ja està fet. I ara es fa palès que és incomplet i que està poc definit ja que no inclou el detall crucial de com canviar el sentit del corrent de l'electroimant en els moments i en les posicions adequades (punt 3 de l'heurística).

S'ensenyen les dues làmines de coure que seran les escobretes del motor: el problema consisteix a esbrinar la posició que han d'ocupar. Com que hi ha diverses possibilitats de col·locar-les, es dispara una **heurística de l'exploració** i es plantegen dues possibilitats:<sup>44</sup> o les escobretes van paral·leles als imants (posició A de la figura 7.13) o transversals (posició B).

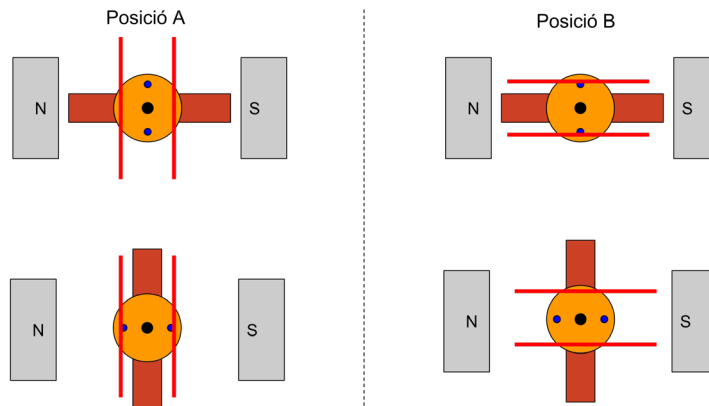


Figura 7.13

Però per a cada exploració intervé una **heurística del raonament deductiu** ja que cal mirar la posició de l'electroimant del rotor respecte als imants, és a dir, si s'hi encara o no, ja que ha de desactivar-se cada vegada que s'hi encara. I d'aquí es dedueix que la posició A (figura 7.13) és la que activa i desactiva l'electroimant quan convé.

Posades les escombretes arriba el moment més emocionat. Els rostres s'il·luminen per l'expectació. Tots els prototips, si s'han construït correctament i han passat els controls de qualitat respectius,<sup>45</sup> funcionaran (figura 7.14).

Poca gent no resistirà la temptació d'empentar el rotor perquè aquest no arrenca a la primera. I aquí sorgeix un problema inesperat: el motor s'ha d'engegar quan se li dona corrent.



Figura 7.14

### **Emergència i identificació de l'error**

Sovint, al motor li caldrà una petita empenta per arrancar (vegeu el vídeo: < <https://www.youtube.com/watch?v=wXg33N4DBww&feature=youtu.be>>). Vet aquí un error emergent del prototip amb què hem iniciat el projecte. Com tots els errors, aquest també genera el problema d'identificar en què consisteix, i recordeu que sovint la solució d'aquesta mena de problemes possibiliten una nova temptativa.

Comencem per **observar** la funció de les escombretes:

- A cada mitja volta del rotor, canvien el sentit del corrent elèctric de l'electroimant.
- Desactiven l'electroimant cada vegada que els braços s'encaren als imants, ja que no fan contacte amb els borns de l'electroimant.

Observeu també la posició del rotor quan el motor està aturat: normalment quedarà amb els braços encarats als imants, ja que aquests atreuen el ferro del cos de l'electroimant. Com que ens preguntem per què no arrenca d'entrada, probablement es dispararà una **heurística del raonament deductiu**:

- En la posició d'aturada l'electroimant sempre queda encarat als imants i les escombretes no freguen els borns de contacte de manera que està inactiu i, per tant, no pot arrencar.
- Per arrencar, cal que la posició de l'electroimant sigui transversal al camp magnètic, és a dir, paral·lel als imants, ja que l'electroimant sempre estarà activat i girarà atret pels imants.

La conclusió és que aquest motor de dos braços mai arrencarà sol, necessita d'una empenta externa. I arribats a aquest punt és on actuen les **heurístiques del tot s'hi val**: i si tingués tres braços i tres borns?

Amb aquesta heurística és pot iniciar una pluja d'idees per disparar noves **heurístiques de raonament** i reforçar la nova temptativa. D'entrada, els braços no podrien quedar encarats als imants en la posició de parada, les escombretes fregarien almenys dos borns i activarien els electroimants i potser es produirien el parell de forces necessàries per arrencar.

Tot plegat anima a fer la segona temptativa.

## Segona temptativa

Ja s'ha dit que identificar l'error esdevé un nou problema que nia en l'original, i que conèixer la solució deriva en la nova temptativa (heurística + algorisme) per resoldre el problema original; és per això que se n'aprèn, dels errors. I en el cas que ens ocupa, l'error consisteix en què el rotor té dos braços, per tant, la nova temptativa ens encamina cap a un rotor de tres braços (figura 7.15).

És una heurística clara i concisa que de nou mobilitza un munt de competències executives, que ens estalviarem de comentar ara, ja que els procediments en joc s'assemblen als que hem usat en la primera temptativa, tot i que el rotor de tres braços és més complex de disseny i realització.

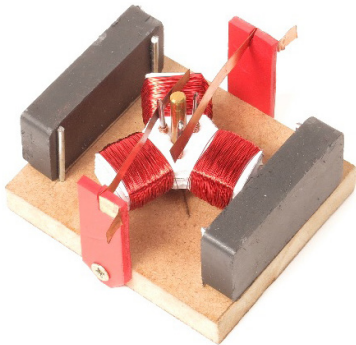


Figura 7.15

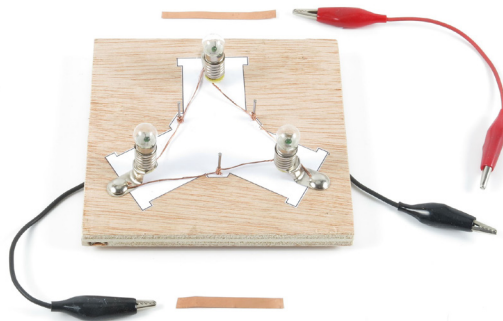


Figura 7.16

Aquest prototip funciona i resol el problema. Engega a la primera ([vegeu el vídeo](#)).

Que una heurística tingui èxit no implica que es compregui tota la realitat que ha creat. Per comprendre que el motor de tres braços sempre arrenca, cal comprendre com funciona, de manera que hi ha un coneixement a la vista que cal esbrinar.

Com que seguir la dinàmica del circuit que formen els tres electroimants i els possibles contactes dels tres borns quan el rotor gira no és immediat, i com que tampoc es fàcil seguir i comprovar com s'activen o es desactiven els electroimants, fem servir l'**analogia** per evidenciar-ho. La figura 7.16 mostra una simulació del circuit del rotor en què s'han substituït els electroimants per bombetes.

Abans de posar-s'hi, cal **explorar** els contactes entre els tres borns i les dues escombretes (figura 7.17), ja que no són sempre iguals.

- Una escombreta fa contacte amb dos borns a la vegada i l'altra, a un sol (figura 7.17 A).
- Cada escombreta toca un sol born i queda un born sense contacte (figura 7.17 B).
- Cada terç de volta aquests contactes es van alternant.

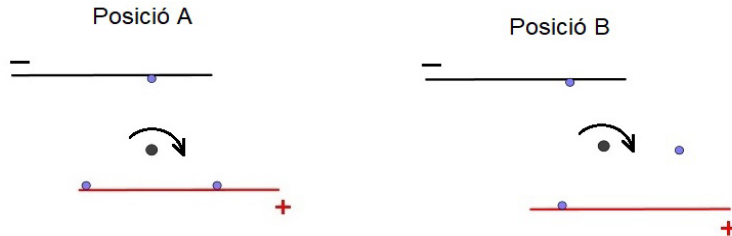


Figura 7.17

Efectuant aquests dos contactes en el simulador de bombetes (figura 7.18), es copsa ràpidament per què el motor de tres braços arrenca a la primera.

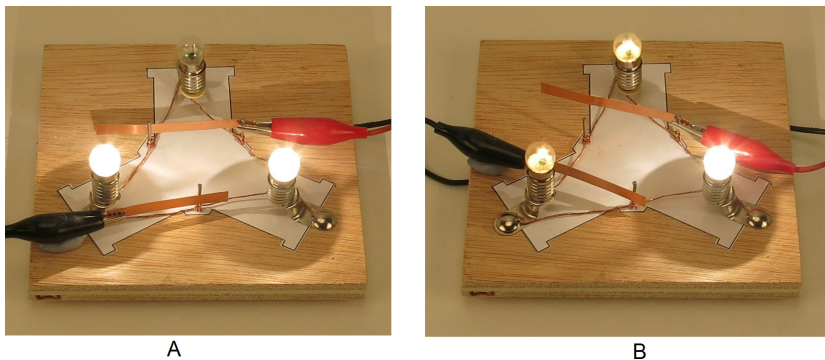


Figura 7.18

Novament ens trobem amb **heurístiques del raonament deductiu** que intervenen decisivament en l'**explicació** del per què el motor de 3 braços sempre engega.

Si en posició de parada un braç s'encara amb un imant (figura 7.18 A), aleshores, una escombreta frega els seus dos borns i es produeix un curtcircuit (bombeta apagada), per tant, aquest braç estarà inactiu, que és el que convé, perquè així no queda clavats per l'atracció o la repulsió. Els altres dos braços estan actius i tenen polaritat diferent, i creen el parell de forces d'arrencada.

Si en la posició de parada cap braç s'encara a un imant (figura 7.18 B), aleshores cada escombreta frega un sol born i en queda un sense contacte; per tant, un electroimant estarà activat directament (bombeta més intensa) mentre que els altres dos, com que estan connectats en sèrie, rebran menys corrent (bombetes menys intenses). En tot cas, és crearà el parell de forces d'arrencada, ja que dos braços tenen la mateixa polaritat i el tercer no.

## Noves perspectives, nous projectes

Sempre amb la perspectiva que un coneixement concret no es tanca mai ja que en ser un node d'una xarxa cognitiva més àmplia sempre tindrà connexions, el prototip de motor que acabem de veure esdevé una plataforma des de la qual albirar «més motors elèctrics». Si consulteu la proposta didàctica completa (vegeu la nota 43) hi trobareu aquests projectes.

### Projecte Pitàgores

Una bona introducció al teorema de Pitàgores (Castelnuovo, 1979) acostuma a situar el personatge i l'època històrica sovint acompanyat per una referència als constructors de piràmides, per bé que se'n troben poques, de serioses. És raonable suposar que els mestres d'obra tindrien les seves dificultats a l'hora de plantejar la base d'una futura piràmide (Hodges, 1989), ja que havien de dibuixar un quadrat de grans dimensions, i, a més, ben escairat.

Per aquí va la narració i el problema que planteja aquest projecte. Per **analogia**, sembla raonable pensar que en aquella època per dibuixar un gran quadrat calia disposar d'un gran escaire, de manera que comencem el projecte per aquí i ja es veurà com desemboquem en el teorema de Pitàgores.

### El problema inicial

Plantegem a la classe el repte de dibuixar un gran quadrat al terra del pati de l'institut per construir una hipotètica piràmide, d'uns 20 metres de costat. La narració també funcionaria si es volgués traçar una pista de bàsquet. Entre tots plegats farem una mica d'arqueologia experimental.<sup>46</sup> Baixem al pati amb 4 trossos de corda d'aquesta longitud, disposats a marcar el gran quadrat amb guix.

Quatre parelles agafen la seva corda pels extrems. Abans d'intentar-ho, fem una pluja d'idees per concretar el procediment que seguirem per formar el gran quadrat. Comença una parella, estira el fil i es queda quieta. Després entra en acció la parella següent, que va a un dels dos extrems del primer costat, un s'hi queda i l'altre avança fins que el fil quedi ben tibet; haurà d'avaluar a ull si les dues cordes formen un angle recte. Entra en acció la tercera parella i segueix el mateix procediment, i també caldrà avaluar a ull nu si el seu fil forma un angle recte amb el fil anterior.

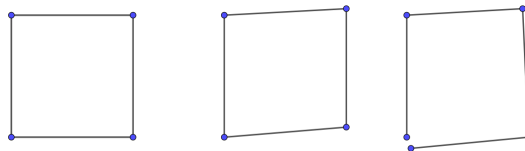


Figura 7.19

Finalment, quan entra en acció la quarta parella veiem l'**error**, perquè difícilment es tancarà el quadrat (vegeu la figura 7.19), de manera que estan obligats a fer alguna rectificació i moure alguna parella per corregir la posició. Però fins i tot si es tanca el



quadrat, la resposta a una pregunta evident queda a l'aire: n'estem segurs que el quadrat no ens ha quedat torçat, ni que sigui una mica?

### Pluja d'idees, pluja d'heurístiques

El que interessa, des del punt de vista didàctic, és que s'adonin que no és gens fàcil dibuixar a terra un gran angle recte, per tant, aquest serà el **nou problema**. Abans de dibuixar un gran quadrat cal saber com dibuixar un angle recte amb els costats de 20 m.

Òbviament, dibuixar un quadrat en un full és la mar de fàcil amb un escaire o amb compàs i regla. El problema es pot reduir a disposar d'un escaire prou gran per dibuixar a terra les dues rectes que el formen i a sobre guiar el fil de 20 metres.

Es pot objectar que per dibuixar un quadrat perfecte de 20 metres de costat podem usar el mateix fil com a compàs, un ús que sens dubte coneixien els mestres d'obra. Però encara faltaven segles per al naixement d'Euclides. Llevat que ho hagin après, els nois i les noies no sabrien com fer-ho, per bé que, una vegada resolt el problema que ens ocupa, es pot plantejar com dibuixar un quadrat només amb regla i compàs.

Podem acordar que el problema es resol fabricant un escaire suficientment gran, com de l'alçada d'una persona, per poder-lo transportar amb facilitat. Com l'hem de fer?

Seguint amb la pluja d'idees ens podem preguntar si en aquella època sabien fer angles rectes llargs i amb precisió. Evidentment que sí, i la prova és que, a banda de les piràmides, sabien alçar parets ben dretes. Una paret ben dreta, vertical, forma un angle recte amb el terra, si aquest és ben horitzontal. Els instruments que els guiaven per fer-les eren la plomada per a la vertical i el nivell d'aigua per a la horitzontal. És el moment d'ensenyar els dos instruments i com es **coordinen** per alçar parets verticals (figura 7.20). Els nivells d'aigua de l'època devien semblar-se a recipients acanalats prims i llargs, plens d'aigua. La plomada segueix sent igual que avui dia, bàsicament.

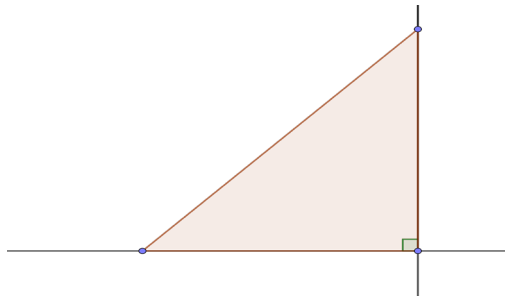


Figura 7.20

De seguida se n'adonaran que la plomada no serveix per marcar un angle recte a terra. Com que hem parlat de parets, algú haurà associat (**heurística de l'analogia**) les parets i el terra de la classe amb la fabricació d'aquest escaire a mida humana. I ja tenim una senzilla i pràctica **heurística del prototip** en marxa: en una paret ben dreta

només caldrà recolzar-hi un llistó prou llarg, prendre mides dels dos catets i tallar els llistons respectius. És un projecte que es pot fer, però es pot avançar més i obtenir un escaire més gran encara i fàcil de transportar. Vet aquí l'estratègia docent per inspirar el nou **prototip** d'escaire.

Depenent de la inclinació del llistó-hipotenusa, els catets variaran de mida, de manera que es podran construir un munt d'escaires de mides diferents, tots ells, però, amb un angle recte. Aquest fet és important de ressaltar i serà rellevant a partir d'ara perquè obre la porta a una descoberta prou interessant per inspirar el nou prototip.

## Nou problema

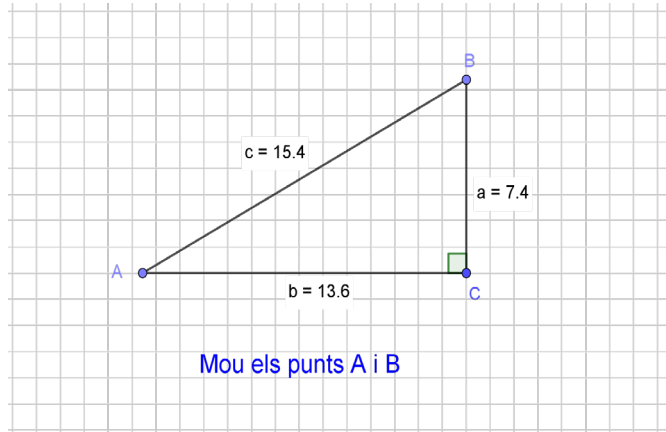


Figura 7.21. Vegeu la simulació interactiva a: <https://ggbm.at/cuztjf4s>

De moment, tothom té al cap el gran escaire format per tres llistons clavats pels extrems. I això és el que simularem amb el Geogebra, de manera que **explorem** catets de mides diferents i les mides de les respectives hipotenuses (figura 7.21).

Passada una estona d'exploració, ja es veurà que malgrat que els dos catets puguin tenir una mesura exacta, la hipotenusa acostuma a no ser-ho, és a dir, que hi ha decimals pel mig. Llavors, ens hem de fer **una pregunta**: hi haurà algun triangle rectangle en què la longitud dels seus costats es mesuri en nombres naturals? Ho tindrem més fàcil per mesurar i tallar els llistons. El mateix principi d'eficàcia i facilitat regia per a egipcis i babilonis.

Així que tothom a **explorar**, amb el simulador de triangles rectangles, per descobrir si hi ha algun triangle rectangle que compleixi aquesta condició. Recordeu que tota exploració acostuma a tenir un descobriment associat. Si una classe sencera s'hi dedica, en un moment o altre es **descobriran** els triangles (3,4,5), (5,12,13) i (8,15,17) i els seus semblants.

## Inspirar una heurística

I ara arriba el moment de presentar i centrar-se en la imatge de la figura 7.22.

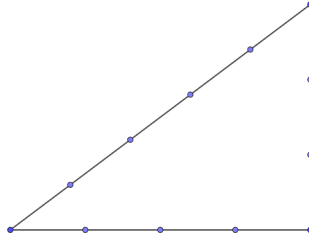


Figura 7.22

El mestre d'obres sap que manejar un estri tan gros és poc pràctic. Hem solucionat el problema inicial, sí, perquè ja tenim unes quantitats exactes que facilitaràn la construcció del gran escaire. Abans de posar-nos-hi, paga la pena plantejar-se si no tenim una alternativa més manejable que un gran escaire de fusta.

Fem una pluja d'idees amb aquest propòsit. Més manejable no vol dir més petit, sinó, per exemple, que es transporti amb més facilitat. Centrem l'atenció en la figura 7.22, en la qual hi ha marcats punts per cada unitat de longitud. Això propicia una determinada heurística del prototip.

I la clau del nou disseny es troba a canviar una de les propietats de l'escaire que tothom té al cap, per bé que de manera implícita: un llistó és rígid. Podria ser plegable? Proposarà algú. Sí, per què no. Però la construcció encara serà més complicada. Si no arriba la gota inspiradora, feu-la ploure: fixeu-vos en el dibuix, hi ha marcats uns punts, que indiquen cada unitat de longitud. Si no es troba l'analogia, inspireu-la tallant l'àncora que no la deixa sortir: el llistó és rígid, el contrari de rígid és flexible. Una corda, tal vegada? Un munt de ments pensant la trobaran, aquesta heurística de l'analogia, que dispararà l'heurística del prototip del gran escaire, que hi cap en una butxaca.

Podem suposar que els mestres d'obra de l'època disposaven de grans escaires de corda. Així que posem fil a l'agulla: una corda de  $5 + 3 + 4$  metres, i a marcar cada metre amb un tros de cinta de color, i a fer un nus entre el cap i la cua.

Com passa de vegades, quan es troba una solució, no sempre es frisa per aplicar-la, perquè el més estimulante és el procés de cerca de la solució, així que no és imprescindible baixar al patí per dibuixar el gran quadrat. La narració continua i almenys s'obren dos camins.

Per una banda, podem demanar-nos com s'ho van fer els operaris que van pintar la pista de bàsquet l'institut. Duien un gran escaire corda? Una cerca ràpida per Internet ens portarà a visualitzar un **teodolit**. És l'ocasió d'entendre com s'opera amb aquest aparell per traçar angles rectes amb els costats ben llargs. Amb un transportador d'angles de 360 graus i amb la funda d'un bolígraf es pot improvisar una explicació ràpida o bé plantejar-se el projecte de construir-ne un.

Per una altra banda, podem continuar amb el relat històric.

### Una mica d'arqueologia experimental

En general, el teorema de Pitàgores es presenta a les aules com un coneixement elaborat, és a dir, s'ensenya primer el final de la deducció del teorema i després es verifica amb construccions geomètriques. És com començar la casa per la teulada.

Tanmateix, és lògic que sigui així. Ja s'ha vist que seguint la via purament experimental tot generant triangles rectangles amb el Geogebra no és gens immediat trobar les ternes pitagòriques de nombres naturals. Tota una classe dedicada a aquesta tasca amb prou feines trobarà la terna (3,4,5) i les semblants, i amb molta sort potser algú trobarà les (5,12,13) o (8,15,17).

Molt més difícil, per no dir improbable, és inferir la relació pitagòrica del triangle rectangle d'una manera espontània mitjançant una **heurística del raonament inductiu** sobre aquestes ternes. La igualtat entre la suma dels quadrats dels catets i el quadrat de la hipotenusa és una relació que roman amagada al comú dels mortals per molt que un miri i remiri les ternes pitagòriques. Una ment entrenada ho podria fer, sí, però si està ben educada ja coneixerà el teorema de Pitàgores. De fet, hi ha més d'un centenar de demostracions<sup>47</sup> del teorema de Pitàgores, i la que he triat aquí és de les més antigues, per bé que no és la d'Euclides.

Recordeu que qualsevol heurística sempre és una temptativa per solucionar un problema. Així, doncs, cal tenir una font de motivació per embrancar-se en la via cognitiva pitagòrica. Com que ja s'ha resolt com fer el gran escaire, ens cal una nova narrativa que contextualitzi el problema, i per a aquestes edats no crec que valgui la pura especulació matemàtica.

Una mica d'arqueologia experimental ens la pot proporcionar i ens pot presentar el problema.

La tauleta de la figura 7.23 està formada per 15 ternes pitagòriques, entre les quals hi ha la del gran escaire, de manera que els antics babilonis ja havien explorat i mesurat les dimensions dels triangles rectangles, com hem fet nosaltres, a l'aula estant i amb més recursos tècnics, i podem suposar que els mestres d'obra de l'època disposaven de grans escaires de corda.

La tauleta de la figura 7.24 és un fragment d'exercicis de matemàtica d'una escola de l'època. Salvant les distàncies tecnològiques l'alumnat d'aquella època també usava tauletes. Observeu-hi la segona figura començant per l'esquerra. Ens és familiar, s'ha vist en els capítols 4 i 5 en la versió del problema de la duplicació del quadrat.

La narrativa comença, doncs, amb aquestes dues tauletes que donen una dimensió històrica a l'activitat que fem a l'aula, que té uns antecedents de més de tres mil anys.

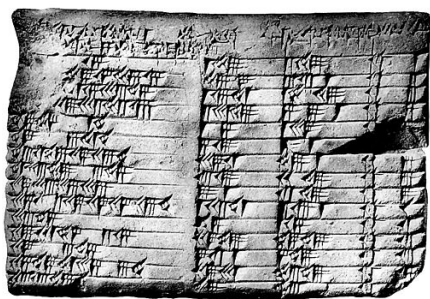


Figura 7.23. Tauleta d'argila. Mesopotàmia, 1800 aC  
13 cm d'amplada, 9 cm d'alçada i 2 cm de gruix.  
Universitat de Colúmbia. Nova York.

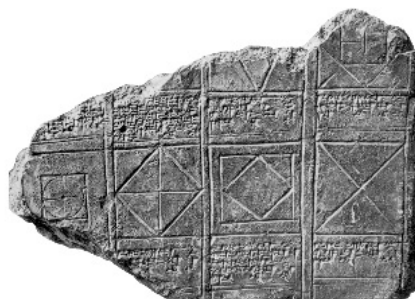


Figura 7.24. Fragment d'una tauleta d'argila exposat a la sala 55 del British Museum. Londres.

## Descobrint Pitàgores

Reptem tota la classe a descobrir el mateix que van descobrir els matemàtics de l'antiga mesopotàmia: una relació sorprenent entre els catets i la hipotenusa dels triangles rectangles, una relació que encara avui dia té moltes utilitats pràctiques, que els anticipem que veurem a la propera classe, sempre que l'hagin descobert. Així que centrem l'atenció en el dibuix de la tauleta de la figura 7.24, i la dibuixem (figura 7.25A). Vista així, la relació pitagòrica està amagada i si no es coneix és impossible distingir-la, per bé que no està tan amagada com en les ternes pitagòriques.

En el cap de tothom, s'hi ha d'instal·lar l'expectativa que hi ha una relació desconeguda entre els catets i la hipotenusa, i aquesta finalitat justifica que fem mans i mànigues perquè els nois i les noies percebin els **observables** i facin **les coordinacions** pertinents.

Presentarem i comentarem successivament les imatges A, B i C de la figura 7.25 per tal de guiar la construcció d'aquest coneixement:

1. Centrem l'atenció en un dels 8 rectangles isòsceles que componen el quadrat que els circumscriu. El distingim amb el color blau (figura 7.25B); és el primer observable (obs1).
2. Tot seguit distingim, de color marró, els dos quadrats adjacents als catets (obs2), i preguntem quina relació hi ha entre ells i el triangle. Són coordinacions evidents i ràpides d'establir:
  - coord<sub>1</sub>: Els dos quadrats estan construïts sobre els dos catets del triangle, la qual cosa esdevé un nou observable: obs<sub>3</sub> → coord<sub>1</sub> (obs<sub>1</sub>, obs<sub>2</sub>)
  - coord<sub>2</sub>: Els dos quadrats són iguals: obs<sub>4</sub> → coord<sub>2</sub> (obs<sub>2</sub>)
  - coord<sub>3</sub>: La superfície de cada quadrat és el doble de la superfície del triangle: obs<sub>5</sub> → coord<sub>3</sub> (obs<sub>2</sub>)

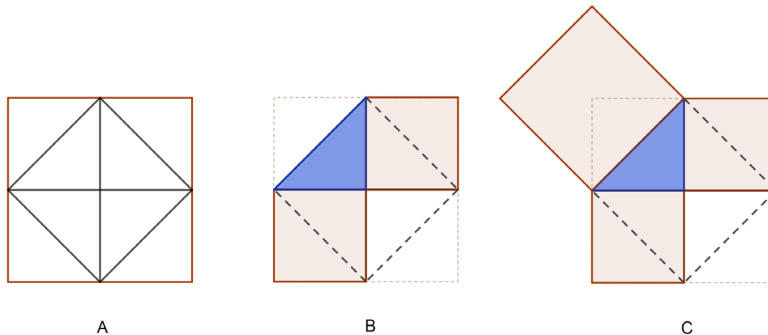


Figura 7.25

3. Sense sortir de la figura 7.25C, fixem l'atenció sobre el quadrat que formen els quatre triangles (obs<sub>6</sub>), amb línia trossejada, i preguntem quina relació té aquest quadrat amb el triangle.

- $\text{coord}_4$ : La nova coordinació estableix que aquest quadrat està construït sobre la hipotenusa del triangle:  $\text{obs}_6 \rightarrow \text{coord}_4(\text{obs}_1)$
  - $\text{coord}_5$ : La superfície d'aquest quadrat equival a la de 4 triangles:  $\text{obs}_7 \rightarrow \text{coord}_5(\text{obs}_6)$
4. Ja tenim, doncs, la percepció i l'atenció centrada en els quadrats construïts sobre els catets i la hipotenusa del triangle; els podem visualitzar millor si el quadrat de la hipotenusa el construïm cap a l'exterior, de manera que no se superposi sobre els quadrats dels catets (figura 7.25C). I ja tenim la coneguda estampa de Pitàgores.
  5. Queda la descoberta pròpiament dita, de manera que no l'ensenyarem. Correspon a cada alumne descobrir-la, és a dir, establir una coordinació entre els observables (3, 5) i (6, 7), és a dir, entre les superfícies dels quadrats dels catets i la del quadrat de la hipotenusa. En tot cas, ens limitem a demanar que fixin l'atenció sobre les superfícies dels tres quadrats.

Aquest és, segurament, el moment més màgic de la lliçó, quan un munt d'alumnes intenten esbrinar la relació entre aquests dos observables. És una bona pràctica docent demanar que, quan ho esbrinin, no diguin res per tal de no privar els altres de descobrir-ho per ells mateixos. Enmig del silenci, quan la majoria dels alumnes barrinen, per la cara que fan sabem si l'han descobert o encara no. L'emoció d'alegria acompanya les descobertes.

Som davant d'una **heurística del raonament deductiu** que estableix dues conclusions possibles:

Superfície del quadrat del catet 1 = 2 triangles  
 Superfície del quadrat del catet 2 = 2 triangles  
 Superfície del quadrat de la hipotenusa = 4 triangles

---

1. Per tant: quadrat del catet 1 + quadrat del catet 2 = quadrat de la hipotenusa  
 O bé:
2. Per tant: doble del quadrat d'un catet = quadrat de la hipotenusa

Serà molt alligonorador que cadascú escrigui la seva descoberta en una frase clara i simple, per tal de contrastar les dues conclusions possibles i obrir un debat sobre si ambdues conclusions tenen la mateixa validesa.

### **L'emergència de l'error**

Per descomptat que, des del punt de vista lògic, són correctes sempre que ens limitem als triangles rectangles isòsceles. I aquí es dispara una **heurística de la interrogació** basada en una **analogia**: si el triangle rectangle no és isòsceles, aquestes conclusions també valen?

La resposta es troba fent la mateixa composició, però ara amb un triangle rectangle escalè; i vet aquí què surt (figura 7.26):

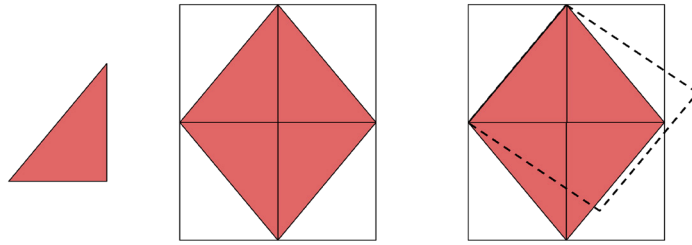


Figura 7.26

Identificar l'error que acaba de sorgir és clau per continuar avançant. No està ni en la composició de la figura de la tauleta ni el raonament que s'hi ha bastit, sinó en creure o donar per fet que les dues conclusions són vàlides per a tots els triangles rectangles.

Potser aquí hi hagi un biaix cognitiu de confirmació.

Hem avançat, sí, però no tot el que creïem.

### El nou problema

Ja s'ha dit que identificar un error és tot un problema, però que si s'aconsegueix, el coneixement que se'n deriva acostuma a reformular de nou el problema original i forma part de la nova temptativa cognitiva per resoldre'l. De manera que el nou problema és demostrar si la relació entre els quadrats dels catets i el quadrat de la hipotenusa, que s'ha demostrat vàlida per a tots els triangles rectangles isòscels, ho és també per a tota mena de triangles rectangles.

Per on hem de començar?

L'**heurística del tot s'hi val** és el comodí de la resolució de problemes. Com que la cosa va de quadrats, dels catets i de la hipotenusa, perquè no **explorem** si hi ha altres composicions amb el triangle rectangle escalè i els seus tres quadrats que ens puguin donar la solució?

Ja sabem que no els podem posar com abans, perquè no componen cap quadrat, però potser poden estar inscrits dins d'un quadrat. Tot un trencaclosques!

Així que retallem un munt de triangles rectangles escalens amb els seus tres quadrats i tota la classe comença la cerca de composicions quadrades. Es poden usar tantes peces com es vulgui, el cas és compondre quadrats. Un munt de mans i ments treballant amb el mateix objectiu més tard o d'hora trobaran aquestes dues composicions (figura 7.27):

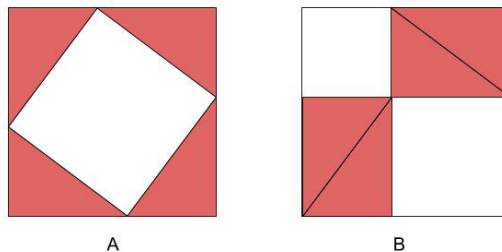


Figura 7.27

Els quadrats A i B de la figura 27 són iguals. Teniu la imatge projectada i la classe n'està pendent. Com que la majoria dels alumnes tenen present que l'objectiu és demostrar que la suma dels quadrats dels catets ha de ser igual al quadrat de la hipotenusa, és molt probable que a més d'un se li dispari una **heurística del raonament deductiu**. Una vegada més demanarem que ningú ho digui en veu alta. Ja es veuen cares emocionades per l'alegria del descobriment, i també de tenses per l'esforç cognitiu o de frustrades per l'abandó.

En tot cas, ens toca, una vegada més, facilitar a tothom la percepció dels observables i de les coordinacions necessàries per inspirar l'heurística pertinent. La construcció de la seva seqüència ens portarà a la conclusió que si els quadrats A i B són iguals i els dos contenen quatre rectangles iguals, la superfície del quadrat de la hipotenusa en A ha de ser igual a la suma dels quadrats dels catets en B.

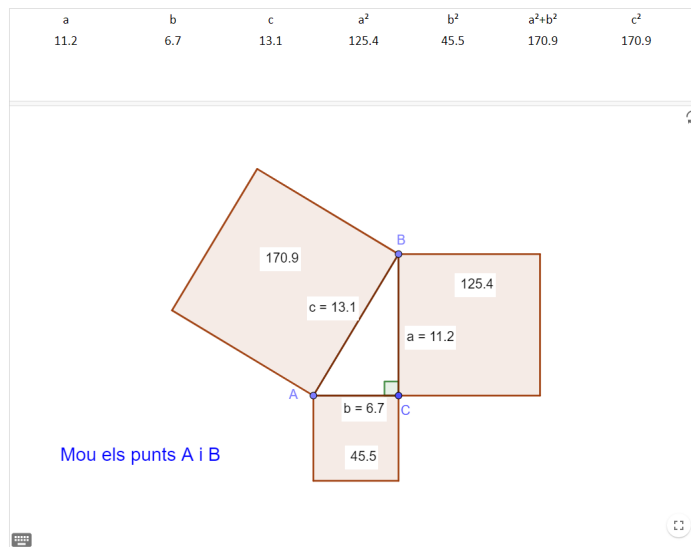


Figura 7.28. (Vegeu la simulació interactiva a <https://ggbm.at/vska3gvf>)

Ara és el moment de jugar al teorema de Pitàgores amb el Geogebra (figura 7.28), i dibuixar tota mena de triangles rectangles amb els quadrats corresponents, calcular els quadrats dels costats i formular en llenguatge matemàtic l'equació pitagòrica:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

### Profe, de què serveix el teorema de Pitàgores?

És el moment de respondre la pregunta més freqüent a les aules. Si ningú no ens ho pregunta, els ho preguntem nosaltres. Una vegada més, com s'ha apuntat en els dos projectes anteriors, un coneixement que s'acaba d'aprendre no es pot recloure en ell mateix, cal reforçar molt la concepció que un coneixement concret és un sistema obert per les múltiples connexions que té dins la xarxa cognitiva, i que aquesta obertura ens aboca a la creativitat.



## Bibliografia citada

### A

ACHÓN, J. (1984). *La funció de l'error en l'aprenentatge escolar*. P. 49-54. *Perspectiva Escolar*, juny de 1984, Barcelona.

ACHON, J. (1990). *Estratègia per a l'ensenyança-aprenentatge de projectes tecnològics*. Tesis doctoral, Facultat de Ciències de l'Educació, Universitat de Barcelona.

ARQUIMEDES (III aC). *El mètode*. Ed. Eudeba, Buenos Aires, 1966.

ASHLOCK, R.B. (1990). *Error patterns in computation: using error patterns to help each student learn*. Boston: Allyn & Bacon.

ASTOLFI, J.P. (1997). *L'erreur, un outil pour enseigner*. Ed. ESF, Issy-les-Moulineaux. En castellà: *El error un medio para enseñar*. Ed. Díada Editora, Sevilla, 1999.

AUSUBEL, D.P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*. Nova York: Holt, Rinehart & Winston. En castellà: *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. Ed. Trillas, Mèxic, 1976.

### B

BACON, F. (1620). *Novum Organum*. Ed. Laia, Barcelona, 1987.

BACHELARD, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Ed. Vrin, París. En castellà: *La formación del espíritu científico*. Ed. Argos, Buenos Aires, 1948.

BARUK, S. (1985). *L'âge du capitain*. Ed. du Seuil, París.

BUENO, D. (2017). *Neuroeducació per a educadors*. Ed. Rosa Sensat. Barcelona.

### C

CAMPS, M.V.; ESTANY, A.; IZQUIERDO, M. (ed.) (2012). *Error y conocimiento. La gestión de la ignorancia*. Ed. Comares, Granada.

CASTELNUOVO, E. (1979). *La matematica. La geometria*. Ed. La Nuova Italia Editrice. Firenze. En català: *La matemàtica. La geometria*. Ketres Editora, Barcelona, 1981.

CIEAEM (1987). *Role de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la Matématique*. Actes de la 39<sup>a</sup> conferència internacional de Sherbrooke. Éditions de l'Université de Sherbrooke, 1988.

COPERNICUS, N. (1543). *De Revolutionibus Orbium Coelestium*. En castellà: *Sobre las revoluciones*. Ed. Altaya, Barcelona, 1994.

COPI, I.; COHEN, C (1978). *Introduction to logic*. Prentice Hall & IBD. En castellà: *Introducción a la lógica*. Ed. Limusa, Mèxic, 2013.

CORBALLIS, M.C. (2007). *Pensamiento Recursivo*. *Mente y cerebro*, n. 27.

CORBALLIS, M.C. (2011). *The recursive mind. The origins of human Language, thought and civilization*. Princeton University Press, Nova Jersey.

CHOMSKY, N. (1972). *Language and Mind*. Ed. Harcourt Brace Jovanovich, Nova York. En castellà: *El lenguaje y el entendimiento*. Barcelona: Planeta-Agostini, 1992.

## D

DE BONO, E. (1969). *The mechanism of mind*. Nova York: Simon and Schuster. En castellà: *El mecanismo de la mente*. Ed. Monte Àvila, Caracas, 1971.

DE BONO, E. (1970). *Lateral thinking: creativity step by step*. Nova York: Harper & Row. En castellà: *El pensamiento lateral. Manual de creatividad*. Ed. Paidós, Barcelona, 1986.

DE LA TORRE, S. (1993). *Aprender de los errores*. Editorial Escuela Española, Madrid.

DESCARTES, R. (1637). *Discours de la Methode*. En català: *Discurs del mètode*. Edicions 62, Barcelona, 1996.

DESCARTES, R. (1641). *Meditationes de prima philosophia*. En català: *Meditacions metafísiques*. Edicions de 1984, Barcelona, 1995.

## E

EGAN, K. (1992). *Imagination in Teaching and Learning*. University of Chicago Press. En castellà: *La imaginación en la enseñanza i el aprendizaje*, Amorrortu Editores, Madrid, 1999.

EINSTEIN, A.; INFELD, L. (1938). *The Evolution of Physics*. Cambridge University Press. En castellà: *La evolución de la física*. Salvat editores, Barcelona, 1986.

EKMAN, P. (1972). *Emotion in the Human Face*. Pergamon Press. En castellà: *El rostro de las emociones*, RBA Ediciones, Barcelona, 2015.

EVANS, J.St.B.T. (2010). *Thinking twice: Two minds in one brain*. Oxford: Oxford University Press.

## F

FARADAY, M. (1839). *Experimental Researches in Electricity*. Royal Society London.

FOERSTER, H. [et al.] (1977). *Hommage à Jean Piaget. Epistémologie génétique et équilibration*. Delachaux & Niestlé, París. En castellà: *Homenaje a Jean Piaget. Epistemología genética y equilibración*. Ed. Fundamentos, Madrid, 1981.

FEYERABEND, P.K. (1970). *Against method: outline of an anarchistic theory of knowledge*. Minnesota Studies in the Philosophy of Science. En castellà: *Contra el método. Esquema de una teoría anarquista del conocimiento*. Ed. Ariel, Barcelona, 1974.

FREINET, C. (1966). *Essai de psychologie sensible*. Ed. Delachaux & Niestlé Neuchatel, Lonay (Suïssa).

## G

GIGERENZER, G. (2007). *Gut Feelings*. Ed. Penguin Books, Londres. En castellà: *Decisiones instintivas*. Ed. Ariel, Barcelona, 2008.

GILOVICH, T. (1991). *How We Know What Isn't So. The Fallibility of Human Reason in Everyday Life*. Ed. Simon & Schuster, Nova York. En castellà: *Convencidos pero equivocados*. Ed. Milrazones, Barcelona, 2009.

GLADWELL, M. (2005). *Blink. The Power of Thinking Without Thinking*. Ed. Back Bay Books, Nova York. En castellà: *Inteligencia intuitiva ¿Por qué sabemos la verdad en dos segundos?* Ed. Taurus, 2013.

## H

HARRIS, P.L. (2000). *The work of the imagination*. Blackwell Publishers Ltd., Nova Jersey. En castellà: *El funcionamiento de la imaginación*. Ed. FCE, Buenos Aires, 2005.

HEMPEL, C.G. (1965). *Aspects of scientific explanation and other essays in the philosophy of science*. Ed. The Free Press, Nova York. En castellà: *La explicación científica*. Ed. Paidós, Barcelona, 1979.

HESSE, M.B. (1966). *Models and Analogies in Science*. Notre Dame University Press, Indiana.

HODGES, P. (1989). *How the Pyramids Were Built*. Element Books Ltd. Shaftesbury UK. En castellà: *Cómo se construyeron las pirámides*. Ed. Tikal, Madrid, 1994.

HOFSTADTER, D.; SANDER, E. (2013). *Surfaces and Essences: Analogy as the Fuel and Fire of Thinking*. Basic Books. En castellà: *La analogía: el motor del pensamiento*. Tusquets Editores, Barcelona, 2018.

HOLT, J. (1964). *How Children Fail*, Dell Publishing Company, Nova York. En castellà: *El fracaso de la escuela*, Alianza editorial, Madrid, 1987.

HUME, D. (1758). *An Enquiry concerning Human Understanding*. En català: *Investigació sobre l'enteniment humà*. Editorial Laia, Barcelona, 1982.

## I

IREM DE GRENOBLE (1980). *Quel est l'âge du capitaine?* Butlletí n. 323 de l'APMEP.

## J

JACKSON, P. (2012). *Structural Packaging*. Laurance King Publishing, Londres. En castellà: *Estructuras de Packaging*, Promopress, Barcelona, 2012.

## K

KAHNEMAN, D. (2011). *Thinking, Fast and Slow*. Farrar, Straus and Giroux, Nova York. En castellà, *Pensar ràpid, pensar lent*. Ed. Debate, Barcelona, 2012.

KAKU, M (1994). *Hyperspace*. Oxford University Press, Nova York. En castellà: *Hiperespacio*. Ed. Crítica, Barcelona, 1996.

KASNER E.; NEWMAN, J. (1940). *Mathematic and imagination*. Ed. Simon & Schuster, Nova York. En castellà: *Matemáticas e imaginación*, Salvat Editores, Barcelona, 1994.

KEITH, F. (2010). *Dual-Process and Dual-System Theories of Reasoning*. Philosophy Compass, 5(10), 2010, p. 914-926.

KERR, D.; CHUNG, G.K.W.K. (2013). *The Effect of In-Game Errors on Learning Outcomes*. Report 835, National Center for Research on Evaluation, Standards and Student Testing. Universitat de Califòrnia, Los Angeles.

KUHN, T.S. (1957). *The Copernican Revolution. Planetary Astronomy in the Development of Western Thought*, Harvard University Press, Cambridge. En castellà: *La revolución copernicana. La astronomía planetaria en el desarrollo del pensamiento*. Ed. Ariel, Barcelona, 1996.

KUHN, T.S. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. The University of Chicago, Press. En castellà: *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de Cultura Económica, Mèxic, 1971.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and Refutations - The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press. En castellà: *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Alianza Editorial, Madrid, 1978.

## L

LANDA, L.N. (1978). *Algoritmos para la enseñanza y el aprendizaje*. Ed. Trillas, Mèxic.

LANDA, L.N. (1972) *Cibernètica y pedagogia*. Ed. Labor, Barcelona

LATINJAK, A.T. (2013). *Aprentatge implícit i aprenentatge explícit: entre el fer i el comprendre*. Publicacions UdG.

LOVELL, K. (1966). *The growth of basic mathematical and scientific concepts in children*. En castellà: *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños*. Ediciones Morata, Madrid, 1977.

LURIA, A.R. (1979). *Consciencia y lenguaje*. Ediciones de la Universidad de Moscú. Editat per Visor Libros, Madrid, 1984.

## M

MAYO, D. (1996). *Error and the growth of experimental knowledge*. Chicago University Press.

MEDNICK, S.S. (1968). *The Remote Associates Test. The Journal of Creative Behavior*.

MORA, F. (2013). *Neuroeducación*. Alianza Editorial, Madrid.

MORIN, E. (1999). *Les sept savoirs nécessaires à l'éducation du futur*. Ed. UNESCO, París. En castellà: *Los siete saberes necesarios para la educación del futuro*. Ed. Paidós Ibérica, Barcelona, 2001.

MORIN, E. (1999). *La tête bien faite. Repenser la réforme, réformer la pensée*. Ed. du Seuil, París. En castellà: *La mente bien ordenada*. Ed. Seix Barral, Barcelona, 2001.

MUÑOZ, C. (2004). *Introducción a la lógica*. <<http://webs.ucm.es/info/pslogica/cdn.pdf>> (Consulta 10 gener 2020)

## N

NERSESSIAN, N.J. (2008). *Creating Scientific Concepts*, Cambridge: MIT Press.

NEWELL, A.; SIMON, H.A. (1972). *Human Problem Solving*. Ed. Prentice-Hall, Nova Jersey.

## P

PAPERT, S. (1980). *Mindstorms*. Basic Books, Inc., Publishers / Nova York. En castellà: *Desafío a la mente. Computadoras y educación*. Ed. Fernández Long y Reggini, Buenos Aires, 1981.

PIAGET, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives: Problème central du développement*. P.U.F., París. En castellà: *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*. Madrid: Siglo XXI, 1978.

PIATTELLI, M. (1993). *L'illusione di sapere. Che cosa si nasconde dietro i nostri errori*. Ed. Mondadori, Milà. En castellà: *Los Túneles de la mente: ¿qué se esconde tras nuestros errores?* Ed. Crítica, 1995.

PLATÓ (427 aC - 347 aC). *Diàleg de Menó*. Edició de la Fundació Bernat Metge, Barcelona, 1956.

POINCARÉ, H. (1908). *Science et Méthode*. Ed. Flammarion, París. En castellà: *Ciencia y método*. Ed. Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1944.

PÓLYA, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press. Nova Jersey. En castellà: *Cómo plantear y resolver problemas*. Ed. Trillas, Mèxic DF, 1965.

PÓLYA, G. (1962). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving*, Wiley, Nova Jersey.

POPPER, K.R. (1972). *Objective Knowledge. An Evolutionary Approach*. Ed. Oxford University Press, Oxford. En català: *El coneixement objectiu*. Edicions 62, Barcelona, 1985.

PUIG, P. (1956). *Didáctica matemática eurística: 30 lecciones activas sobre temas de enseñanza media*. Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

## R

RICO, L. (1995). *Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamericano. Mèxic.

ROSZAK, T. (1986). *The cult of information*, Pantheon Books, Nova York. En castellà: *El culto a la información*. Ed. Crítica, Barcelona, 1988.

RODARI, G. (1973). *Grammatica della fantasia*, Giulio Einaudi. Editore. Torino. En castellà: *Gramática de la fantasía*. Ed. Avance, Barcelona, 1976.

## S

SCHULZ, K. (2010). *Being Wrong: Adventures in the Margin of Error* Harper Collins Publishers, Nova York. En castellà: *En defensa del error*. Ediciones Siruela, Madrid, 2015.

SANMARTÍ, N. (2007). *Evaluar para aprender: 10 ideas*. Ed. Graó, Barcelona.

SHANE, F. (2005). *Cognitive Reflection and Decision Making*, Journal of Economic Perspectives, Volum 19, n. 4, p. 25-42.

SMITH, E.E.; KOSSLYN, S.M. (2007). *Cognitive Psychology: Mind and Brain*. Ed. Pearson Prentice Hall. En castellà: *Procesos cognitivos: modelos y bases neuronales*. Ed. Pearson Prentice Hall, 2008.

SPANGLER, DAVID B. (2010). *Strategies for Teaching. Fractions*. Ed. Corwin, Thousand Oaks, Califòrnia.

SPANGLER, DAVID B. (2011). *Strategies for Teaching. Whole number Computation*. Ed. Corwin, Thousand Oaks, Califòrnia.

STANOVICH, K.E. (2011). *Rationality and the Reflective Mind*. Ed. Oxford University Press, Nova York.

STANOVICH, K.; WEST, R.; TOPLAK, M.E.(2016). *The Rationality Quotient: Toward a Test of Rational Thinking*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts - Londres, Anglaterra.

## T

TARSKI, A. (1941). *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Science*, Oxford University Press, Nova York. En castellà: *Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas*, Espasa-Calpe, Madrid, 1968.

TUBAU, E. (coord.) (2005). *Intuïció, raonament i control de l'acció*, Publicacions i Edicions Universitat de Barcelona.

VALLVERDÚ, J.; IZQUIERDO, M. (2010). "Error y conocimiento: un modelo filosófico para la didáctica de la ciencia". *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*. Volum 28, n. 1.

VOGEL, C. (1988). *Génie cognitif*. Ed. Masson, París.

## W

WAGENSBERG, J. (2006). *A más cómo, menos por qué*. Tusquets Editores. Barcelona.

WALLON, H. (1942). *De l'acte à la pensée, essai de psychologie comparée*. Ed. Flammarion, París. En castellà: *Del acto al pensamiento*. Ed. Psique, Buenos Aires, 1974.

WILSON, R.F. (1998). *The Hand: How Its Use Shapes the Brain, Language, and Human Culture*, Vintage Books, Random House, Nova York. En castellà: *La mano*, Tusquets Editores, Barcelona, 2002.

VIGOSTKY, L.S. (1934). *Pensamiento y lenguaje*. Ed. La Pleyade, Buenos Aires, 1978.

WHORF, B.L. (1956). *Language, thought, reality*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

En castellà: *Lenguaje, pensamiento y realidad*, Barral, Barcelona, 1971.

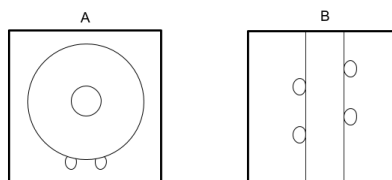
- 1 Bachelard, 1938, p. 21.
- 2 Una possible descripció és aquesta: en un primer moment, F.O. percep només tres cares de l'ortoeдре. Ho manifesta la seva primera temptativa: compta els cubets de la cara lateral (3 x 4) i els multiplica per les tres cares (12 x 3). Tot seguit rectifica: ara sembla que percebi sis cares, que origina la segona temptativa: multiplicar els cubets d'una cara per les sis cares (12 x 6).

Torna a rectificar. Segons el text escrit, ara sembla que percebi una mena de figura entre dues i tres dimensions, que té una base i una alçada, de manera que aplica la fórmula del rectangle: multiplicar els cubets de la base, que considera que és la suma dels cubets de les dues arestes inferiors, (4 + 5), pels cubets de la cara del costat (3 x 4 = 12), que considera l'alçada.

- 3 El nostre sistema perceptiu conté una mena de caixa d'eines *heurístiques* que s'alimenta d'aprenentatges explícits o implícits, i amb aquestes eines dona sentit al món tot fent *deduccions*, conscients o inconscients, a partir de les informacions que rep (Gigerenzer, 2007). De vegades, aquestes deduccions són errònies: bé per manca de coneixements explícits bé pels biaixos perceptius, com és el cas de les anomenades il·lusions òptiques.

Aquesta caixa d'eines conté, segons postulen els psicòlegs cognitius que exploren la representació mental de l'espai, un calaix específic per reconèixer objectes tridimensionals. S'especula que el cervell resol aquest problema a través d'un reconeixement de components bàsics. Aquests components bàsics serien un total de 24 patrons geomètrics tridimensionals anomenats *geons*, un dels quals és la forma ortoèdrica (Smith i Kosslyn, 2007).

Mireu els dibuixos A i B. Els processos de baix a dalt mostren línies i delimiten regions. Però si jugueu mentalment amb la imatge i considereu què podrien significar les regions, podeu arribar a sentir la *il·luminació* del procés de dalt a baix i endevinar què són o què representen, això si atureu ara la lectura i us hi dediqueu una estona:



Aquests dos entreteniments visuals il·lustren els dos tipus de processos esmentats. El de l'esquerra (A) està manllevat de la novel·la *Los detectives Salvajes* de Roberto Bolaño (1953-2003), i el de la dreta (B), del manual *Processos Cognitivos* de Pearson Prentice Hall. Un és un os panda trepant pel tronc d'un arbre i l'altre, un mexicà fent la migdiada; i no cal que us

indiqui quin és cadascun. A partir d'ara, si és que no els coneixíeu, cada vegada que mireu aquestes dues figures no podreu evitar de *veure-hi* el mexicà i l'os.

- 4 Sabem que el volum d'una capsa és el producte de tres nombres (llargada x amplada x alçada). Així que  $a \times b \times c = 64$ . De manera que cal trobar tots els trios de nombres naturals (repetits o no) que multiplicats entre ells donen 64. Aquests nombres han de ser divisors de 64. Cal trobar tots els divisors de 64, que són  $d(64) = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$ . Aquests nombres són els que entren en joc.

Els trios s'han de muntar amb aquests números i de manera ordenada. Comencem per l'1, i el repetim; després esbrinem el tercer nombre. Seguim amb l'1 i després el 2, i esbrinem el tercer nombre, i així successivament. Una vegada calculades aquestes ternes, es calcula la superfície de la capsa; la que gasta menys paper és la que té una forma cúbica.

Capsa	a	b	c	Volum	Superfície
1	1	1	64	64	258
2	1	2	32	64	196
3	1	4	16	64	168
4	1	8	8	64	160
5	2	2	16	64	136
6	2	4	8	64	112
7	4	4	4	64	64

- 5 Termes que han usat diferents autors per referir-se als dos processos en el context del model dual de la ment (Stanovich, 2011, p. 18):

Bargh i Chartrand (1999): processament automàtic, processament conscient.  
 Bazerman, Tenbrunsel (1998): acte desitjat, acte obligat.  
 Bickerton (1995): pensament en línia, pensament desconectat.  
 Brainerd i Reyna (2001): processament essencial, processament analític.  
 Chaiken et al. (1989): procés heurístic, procés sistemàtic.  
 Evans (1984, 1989): procés heurístic, procés analític.  
 Evans i Over (1996): processos mentals tàcits, processos mentals explícits.  
 Wason i Evans (1975): processos tipus 1, processos tipus 2.  
 Fodor (1983): processos modulars, processos centrals.  
 Gawronski i Bodenhausen (2006): processos associatius, processos proposicionals.  
 Haidt (2001): sistema intuïtiu, sistema de raonament.  
 Johnson-Laird (1983): inferències implícites, inferències explícites.  
 Kahneman i Frederick (2002-2005): intuïció, raonament.  
 Lieberman (2003): sistema reflexiu, sistema reflectiu.  
 Loewenstein (1996): factors viscerals, gustos.  
 Metcalfe i Mischel (1999): sistema calent, sistema fred.  
 Norman i Shallice (1986): la programació de la discòrdia, sistema supervisor atencional.  
 Pollock (1991): ràpid i mòduls inflexius, intel·lecció.  
 Posner i Snyder (1975): activació automàtica, processament conscient.  
 Reber (1993): cognició implícita, aprenentatge explícit.  
 Shiffrin i Schneider (1977): processament automàtic, processament controlat.  
 Sloman (1996): sistema associatiu, sistema basat en normes.  
 Smith i Coster (2000): processament associatiu, processament basat en regles.  
 Strack i Deutsch (2004): sistema impulsiu, sistema reflexiu.  
 Thaler i Shefrin (1981): faedor, planificador.  
 Toates (2006): estímul-límit, ordre superior.



Wilson (2002): inconscient adaptatiu, conscient.

- 6 René Descartes, al final de la primera de les seves *Meditacions Metafísiques* usa la figura d'un geni maligne com a recurs retòric per exposar la fal·libilitat de la ment i la seva propensió als errors. Vet aquí la citació:
- Així doncs, suposaré que hi ha, no un veritable Déu –que és font suprema de veritat–, sinó cert geni maligne, no menys arterós i enganyador que poderós, el qual ha fet servir tota la seva indústria per enganyar-me. Pensaré que el cel, l'aire, la terra, els colors, les figures, els sons i les altres coses exteriors, no són sinó il·lusions i somnis, dels quals ell se serveix per atrapar la meua credulitat. Em consideraré a mi mateix com sense mans, sense ulls, sense carn, ni sang, sense cap sentit, i creient falsament que tinc tot això. Romandré obstinadament fix en aquest pensament, i, si, per aquest mitjà, no m'és possible arribar al coneixement d'alguna veritat, almenys és a la meua mà poder suspendre el judici. Per això, tindrè molt de compte a no donar crèdit a cap falsedat, i disposaré tan bé el meu esperit contra les males arts d'aquest gran enganyador que, per molt poderós i astut que sigui, mai podrà imposar-me res.*
- 7 Adaptació a partir del dibuix original (Gigerenzer, 2007, p. 16).
- 8 Els IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) és una xarxa francesa que aplega docents de matemàtica de tots els nivells educatius.  
Vegeu: <<http://www.univ-irem.fr>>  
Vegeu: Butlletí n. 323, APMEP (<<https://www.apmep.fr>>) (Consulta 11 gener 2020)
- 9 La idea de Sarnoff Mednick, quan va dissenyar el test d'associació remota (TAR), era tan simple com poderosa: la creativitat és memòria associativa que treballa excepcionalment bé. Ítems manlevats del llibre de Kahneman, p. 79-80.
- Caseta, Suïssa, Pastís, Formatge
  - Llançament, Llum, Míssil, Cel
  - Sal, Profund, Escuma, Mar
- 10 Una serendipitat és un descobriment casual o imprevist produït en el curs d'una recerca orientada a altres objectius i amb pressupòsits teòrics diferents. Les serendipitats es produeixen sense planificació i es donen de manera inesperada. Al llarg de la història de la ciència, les serendipitats i els descobriments vinculats a l'atzar han constituït una constant permanent.
- El terme deriva de l'anglès *serendipity*, neologisme encunyat per Horace Walpole el 1754 a partir d'un conte persa del segle XVIII, probablement d'origen hindú, anomenat «Peregrinació dels tres prínceps del rei de Serendib», en el qual els protagonistes, uns prínceps de l'illa Serendib (nom àrab de l'illa de Ceilan, l'actual Sri Lanka), solucionaven els seus problemes per mitjà de casualitats increïbles i feien descobriments per accident.
- 11 Aquesta endevinalla cal dir-la en castellà: Una vaca es una res, res en catalán significa nada, quien nada no se ahoga, quien no se ahoga flota, una flota es una escuadra, y una escuadra es un triángulo.
- 12 La bona pregunta és: si li pregunto al teu company quina és la porta de la salvació, quina em dirà, la A o la B?
- Suposem que la porta A sigui la de la salvació. En aquest supòsit, el sentinella sincer contestarà que el seu company mentider dirà la porta B. El sentinella mentider mentirà i contestarà que el seu company sincer també dirà la porta B, en lloc de la A. Com que tant en un cas com en l'altre per força ambdós contestaran el mateix, la porta falsa, per salvar-te has de triar l'altra porta.
- 13 Sigui  $a$  el costat del quadrat, per tant, el seu perímetre és  $4a$  i la seva àrea,  $a^2$ . Les bases i les altures de tots els rectangles que tenen el mateix perímetre s'obtenen sumant i restant, respectivament i consecutivament, una mateixa quantitat  $c$  de  $a$ . L'àrea de qualsevol d'aquests rectangles serà:  $(a + c) \cdot (a - c) = a^2 - c^2$ , per tant:  $a^2 > a^2 - c^2$

La conjectura de l'analogia es demostra:

$$\begin{aligned}a^2 &> a^2 - c^2 \\ a^2 a &> (a^2 - c^2)a \\ a^3 &> a^3 - ac^2\end{aligned}$$

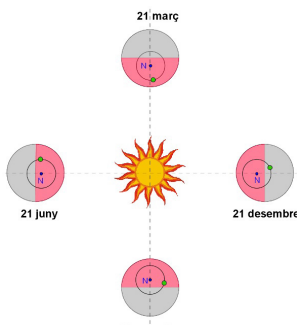
14 La durada del dia i la nit, relativa al nostre hemisferi nord, és:

- Solstici d'hivern: la nit dura més que el dia. Nit més llarga de l'any. Dia més curt.
- Equinocci de primavera: la durada del dia i de la nit és la mateixa.
- Solstici d'estiu: el dia dura més que la nit. Nit més curta de l'any. Dia més llarg.
- Equinocci de tardor: la durada del dia i de la nit és la mateixa.

Quan ja vam tenir clares les opcions que calia explorar i què calia observar-hi, el laboratori va quedar novament a les fosques, en grups de quatre i en un ambient quasi silenciós, de recolliment. Una espelma il·luminava les quatre maquetes de cada grup col·locades en els quatre punts significatius de l'òrbita.

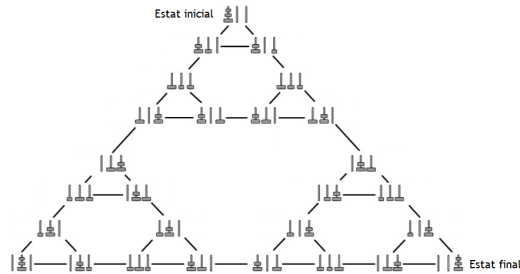
Aquella atmosfera va ajudar molt a interioritzar la narrativa: Copèrnic s'imaginava la Terra i el Sol observant des de l'espai, talment com si navegúes amb la nau Celestia —una nau que tothom coneixia. Miràvem el nostre planeta des d'una posició zenital, és a dir, que vèiem el pol nord a sota nostre. La nau interplanetària tenia la proa apuntant cap a la Terra, i tots estàvem dempeus per mirar-ho bé. En el full d'observació, que representava esquemàticament aquesta vista des de la nau Celestia, havien de colorar en vermell la part il·luminada i en gris la part fosca. A causa d'aquesta inclinació, fixeuvos que la posició del pol nord no pot estar en el centre del cercle que representa la Terra, sinó a l'interior de la zona il·luminada, que sempre serà la meitat de l'esfera terrestre.

Una agulla clavada a la bola, a la nostra latitud (punt verd en la figura, que representa l'exploració 2) facilitava l'observació de la durada del dia i la nit. Al seu torn, cadascú feia rotar la seva bola terrestre i tot l'equip apuntava si l'agulla, en el cercle que descrivia, estava més temps il·luminada o a l'ombra. Així podíem comparar la durada del dia i de la nit. En aquest cas (4.2) a l'hemisferi nord la durada de la nit sempre seria més llarga que la del dia.



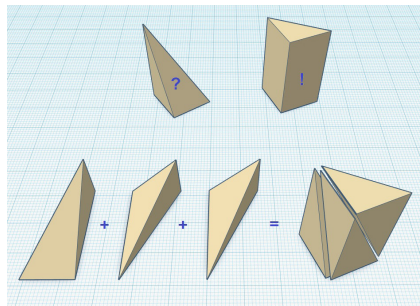
Podeu consultar tot aquest material a: <http://apliense.xtec.cat/arc/node/893>  
Celestia (<https://celestia.es>) és un projecte de codi obert de simulació de l'espai en tres dimensions. Va ser creat per Chris Llorer i inclou suport per a OpenGL i es va presentar l'any 2001. La gran diversitat d'aquest programa proporciona figures com els planetes del sistema solar, satèl·lits, i galàxies, i també inclou constel·lacions i dades precises sobre les coordenades d'ubicació.

15 Representació de l'espai del problema de les torres d'Hanoi (per 3 discos)



Font: Smith i Kosslyn, 2007.

- 16 Es coneix com el principi del tercer exclòs, que diu que la disjunció d'una proposició i la seva negació és sempre vertadera. Per exemple, és veritat que «*Sòcrates és mortal o Sòcrates no és mortal*».
- 17 Les principals lògiques no-clàssiques són:
- La Lògica trivalent preveu tres valors de veritat, la veritat, la falsedat i el que no és veritable ni fals, per desconegut o incert.
  - Les lògiques polivalents són fonamentalment lògiques probabilístiques en què els valors de veritat es corresponen amb l'interval  $[0, 1]$ .
  - La lògica modal incorpora com a operadors els modificadors el necessari i el possible.
  - La lògica temporal incorpora paràmetres temporals. Per a moltes oracions, el seu valor de veritat depèn del moment en què es produeixen.
  - La lògica epistèmica és una lògica intensional que pretén formalitzar enuncisats de creença, opinió, etc.
  - La lògica no-monotònica pretén formalitzar situacions reals en què vam decidir sense una total informació i que posteriorment admet, a mesura que es proven o refuten creences, revisar el sistema total de creença.
- 18 Per exemple: <https://www.tinkercad.com/>
- 19 Per desenvolupar les preguntes, es comença per una piràmide recta de base triangular. Pot anar molt bé disposar d'una impressió 3D de les tres piràmides que componen el prisma de base triangular i resoldre el trencaclosques. Una vegada resolt, cal comprovar que les tres piràmides tenen la mateixa base i la mateixa alçada, de manera que són iguals en volum, i la fórmula funciona. Per a una piràmide amb una base poligonal qualsevol, només cal descompondre el polígon en triangles qualssevol.



- 20 Les cinc connectives de la lògica proposicional amb els seus símbols i equivalents lingüístics:

Negació	Conjunció	Disjunció	Implicació	Doble implicació
no	i	o	Si...aleshores...	Sí i sols si
$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$

Les taules de veritat-falsedat són les interpretacions semàntiques de les cinc connectives lògiques, és a dir, la manera en què cal entendre-les, i que no sempre coincideixen amb les del llenguatge col·loquial. La finalitat del càlcul proposicional no és escatir la veritat o la falsedat de les proposicions o conjunts de proposicions, sinó la validesa del raonament o argumentació que transforma unes proposicions en una conclusió, de manera que poc importa el contingut de les proposicions.

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

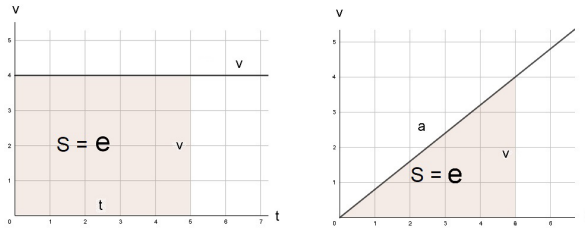
21 Per emfatitzar aquest objectiu, en els manuals de lògica sovint es troben expressions que semblen un sense sentit, com ara: **Si plou, els elefants són verds**. Aquesta ximpleria aparent corrobora la interpretació semàntica de la implicació lògica, és a dir, la taula de veritat falsedat, sobretot quan dona per vàlida que d'una proposició falsa se'n pot inferir una de certa (mireu la taula), i també que la implicació entre dues proposicions falses és una implicació vàlida.

No m'estenc a explicar el sentit estrictament lògic d'aquestes dues implicacions. Ha donat més d'un maldecap a qui s'introdueix en l'estudi de la lògica. És tracta d'un recurs didàctic per emfatitzar que la lògica no s'ocupa de comprovar la veritat o la falsedat de les proposicions, sinó de la validesa dels càlculs lògics.

Però quan es tracta d'esbrinar la lògica subjacent a un coneixement concret, aquesta mena d'implicació formal no es produeix, ja que sempre hi ha un núvol semàntic de què participen els antecedents i els conseqüents. Però això no significa necessàriament que qualsevol implicació que s'estableixi entre els components del núvol semàntic sigui certa. Des de la perspectiva constructivista, cal provar les implicacions.

22 La demostració per inducció s'aplica quan un cas base és provat i una regla d'inducció s'usa per provar una sèrie d'altres casos, que normalment és infinita.

23 Si anteriorment s'ha treballat la gràfica de la velocitat uniforme i s'ha establert l'**analogia entre l'espai recorregut del mòbil en un temps determinat i la superfície del rectangle** que determina la recta que representa la velocitat i l'ordenada del temps (figura de l'esquerra), no hi ha d'haver cap dificultat per establir una altra analogia amb el triangle de la gràfica de l'acceleració (figura de la dreta).



Establerta aquesta analogia, i tenint present que volem calcular l'espai en funció d' $a$  i  $t$ , cal substituir  $v$  en el càlcul de l'àrea del triangle  $e = 1/2 v \cdot t$ . Com que  $v = a \cdot t$ , aleshores  $e = 1/2 v \cdot t^2$ . Aquest cas és una mostra més de la potència epistemològica de l'analogia. Pel que sembla, qualsevol representació gràfica és una analogia entre les magnituds representades i el disseny de la forma gràfica triada.

24 Vegeu: <<https://microbit.org/>>

25 Solució pel compte de la vella, que llegeix i raona l'enunciat així: la llibreta, que costa 1 € més que el bolígraf, més el bolígraf costen 1,10 €. De manera que en els 1,10 €, el bolígraf hi és comptat dues vegades. Treus l'euro i queden 0,10 €, en què el bolígraf està comptat dues vegades. Llavors, un de sol costa 0,05 €. La llibreta costa 1,05 €. En efecte: 1,05 € + 0,05 € = 1,10 €

Formalització algebraica:

$$(1) L + B = 1,10$$

$$(2) L = 1 + B$$

Substituïm (2) en (1)

$$1 + B + B = 1,10$$

$$B = 0,05 \text{ €}$$

26 El test de reflexió cognitiva de Frederick Shane consta de tres ítems:

- Un bat de beisbol i una bola costen 1,10 \$ en total. El bat costa \$ 1,00 més que la pilota. Quant costa la pilota?
- Si 5 màquines trigen 5 minuts per fer 5 ginys, quant de temps trigen 100 màquines per fer 100 ginys?
- En un llac, hi ha un tros cobert de fulles de nenúfar. Cada dia el tros es duplica en grandària. Si els nenúfars trigen 48 dies a cobrir tot el llac, quant de temps trigaran a cobrir la meitat del llac?

27 Ajuda a la segona temptativa:

$$\text{Llibreta} + \text{Bolígraf} = 1,10 \text{ €}$$

$$(1 \text{ €} + \text{Bolígraf})$$

Ajuda a la tercera temptativa:

$$\text{Llibreta} + \text{Bolígraf} = 1,10 \text{ €}$$

$$1 \text{ €} + \text{Bolígraf} + \text{Bolígraf} = 1,10 \text{ €}$$

28 Vegeu: <[https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_cognitive\\_biases](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_cognitive_biases)> (Consulta 11 gener 2020)

29 Vegeu: <<https://es.wikipedia.org/wiki/Falacia>> (Consulta 11 gener 2020)

- 30 Per duplicar la superfície d'un quadrat mantenint la mateixa forma cal construir el nou quadrat sobre la diagonal del primer. Si fem la longitud del costat del quadrat primer igual a la unitat, aleshores, pel teorema de Pitàgores, la longitud de la diagonal serà  $\sqrt{2}$ . Els matemàtics de la Grècia clàssica ja van intentar calcular-ne l'arrel però com que la seva expansió decimal no es pot aturar i tampoc no entra mai en un cicle periòdic, van considerar que la diagonal no era mesurable i que no era «raonable», i tot i que es podia representar perquè tenia una imatge, no el van acceptar com a nombre, ja que qualsevol nombre s'havia d'abastar amb la «raó». El debat sobre la naturalesa numèrica de va continuar durant uns quants segles, fins i tot mil·lennis, fins que al segle XIX es creà la teoria de conjunts i els nombres «irracionals» van obtenir el reconeixement com a nombres.
- 31 Des del punt de vista de la lògica, l'enunciat E: «Si una targeta té una vocal, aleshores té un nombre parell a l'altra cara» és una proposició condicional, que simbòlicament s'expressa així:

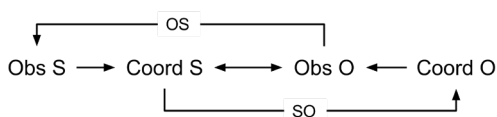
$$V \rightarrow P \text{ (V: Tenir una vocal. P: Tenir un nombre parell)}$$

En el cas de les targetes amb consonant, aquestes no neguen l'afirmació E, de manera que en el context de la lògica de proposicions, la implicació és certa i confirma E.

V	P	$V \rightarrow P$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

Tipus de targeta		$V \rightarrow P$
vocal	parell	Confirma E
vocal	senar	Nega E
consonant	parell	Confirma E
consonant	senar	Confirma E

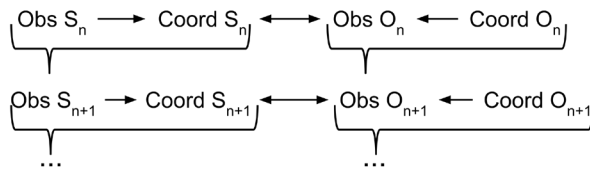
- 32 Quant al primer problema, és un exercici que acostumo a posar a primer d'ESO. Quant al segon, és un ítem de la prova de competències bàsiques de matemàtiques del cicle superior de educació primària del curs 2004/5.
- 33 A la dècada dels anys setanta del segle passat, als inicis de l'era digital, Seymour Papert crea LOGO, el primer llenguatge de programació pensat per a nens. És incubat al mític Media Lab del MIT. Fou una fusió feliç i genial d'elements de la psicologia constructivista i de la intel·ligència artificial. No en va, Papert col·laborà amb Jean Piaget al Centre d'Epistemologia Genètica de Ginebra investigant el paper dels processos recursius en la construcció del coneixement matemàtic, i també amb Marvin Minsky, amb qui fundà el laboratori d'intel·ligència artificial del MIT.  
Scracht, Snap, Code.org, Etoys, etc., tots ells són hereus de la tradició LOGO.  
Vegeu: <http://el.media.mit.edu/logo-foundation/> (Consulta 11 gener 2020)
- 34 Stellarium és un programa de codi obert. Representa un cel realista en 3D, tal com es veuria a ull nu. Vegeu: <http://www.stellarium.org>.  
GeoGebra ([www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)). És un programa de codi obert de matemàtiques dinàmiques per a tots els nivells educatius, que integra, en un únic paquet i de manera molt senzilla, geometria, àlgebra, full de càlcul, gràfiques, estadística i anàlisi matemàtica.
- 35 Vet aquí l'esquema bàsic que proposa J. Piaget a L'équilibration des structures cognitives: Problème central du développement.



La lectura de l'esquema és la següent: comencem per Obs O, que és percebut pel subjecte com a Obs S, és a dir, una relació que va de l'objecte al subjecte (OS). Sobre aquest observable, el subjecte hi efectua alguna coordinació o inferència, Coord S, de manera que s'afegeix a l'objecte Coord O a través d'una relació que va del subjecte cap a l'objecte (SO).

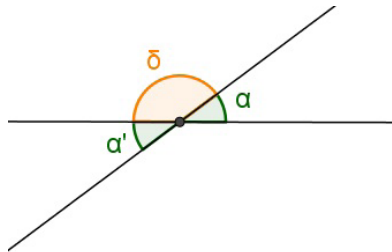
SO i OS són relacions adaptatives que estableixen una realimentació equilibradora entre l'estructura cognitiva que posseeix el subjecte de l'objecte i l'estructura de l'objecte que és percebuda pel subjecte.

Per dir-ho d'una manera més planera: en la mesura que incrementes el coneixement d'un objecte, aquest es dota d'una percepció més complexa i rica. La construcció del coneixement és un procés d'equilibració entre subjecte i objecte, que es desenvolupa a mesura que el subjecte crea noves coordinacions que el fan créixer de manera recursiva:



36 El teorema dels angles oposats es demostra a partir l'angle suplementari  $\delta$ .

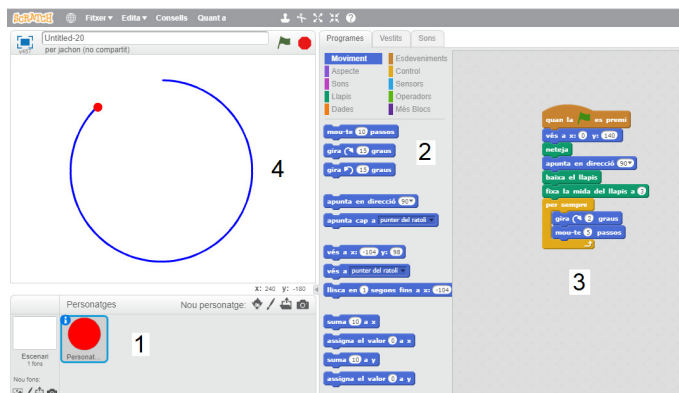
Si  $(\alpha + \delta = 180^\circ)$  i  $(\alpha' + \delta) = 180^\circ$ , aleshores,  $\alpha = \alpha'$



37 Entrevista a Jean Piaget.

< [https://elpais.com/diario/1978/04/15/sociedad/261439217\\_850215.html](https://elpais.com/diario/1978/04/15/sociedad/261439217_850215.html) > (Consulta 11 gener 2020)

38 La interfície d'aquests entorns està ordenada bàsicament en quatre espais diferenciats:



1. En aquest espai es creen els objectes que es programaran.
  2. Repertori de blocs de programació. Els programes es munten a partir d'aquests blocs, que estan classificats segons el tipus d'acció que fan. Són els elements a partir dels quals es els usuaris generaran les seves heurístiques. És un codi visual en què la sintaxi està resolta per mitjà de les formes dels blocs que s'encaixen entre elles.
  3. Espai de treball on es construeixen literalment els programes tot ordenant i encaixant els blocs seleccionats. **Aquests petits programes són, doncs, les temptatives heurístiques**, que poden ser més simples o més complexos quan integren diversos programes.
  4. Espai o escenari on els objectes executen els seus programes. Els errors que contenen les heurístiques emergeixen immediatament en aquest espai. La majoria són errors de tipus eruptius. La presa de consciència d'un error és immediata. El disseny de la interfície facilita molt la identificació i l'experimentació de resolució d'errors, per aquesta raó aquests entorns tenen un alt valor didàctic.
- 39 Celestia és un programa planetari gratuït, de lliure distribució sota llicència GNU, desenvolupat per Chris Laurel (enginyer desenvolupador de programes, graduat en matemàtiques i física al St. Olaf College, Northfield MN) i pel grup de Codi Obert de Celestia, que possibilita explorar l'univers en tres dimensions, a escala i velocitats reals, simular viatges a través del nostre sistema solar, viatjar a més de 100.000 estrelles de la via làctia o fins i tot fora de la nostra galàxia. <<http://celestia.es/>>
- 40 Vegeu: <<http://scratch.mit.edu/projects/jachon/1617716>>
- 41 Vegeu:<[http://galileoandstein.physics.virginia.edu/more\\_stuff/Applets/Kepler/kepler.html](http://galileoandstein.physics.virginia.edu/more_stuff/Applets/Kepler/kepler.html)>
- 42 Vegeu: <<https://ggbm.at/uSjBHEAV>>
- 43 Vegeu: <http://apliense.xtec.cat/arc/node/31027>
- 44 En aquests prototips tan rudimentaris plantejar l'angle d'atac de les escombretes no millora el rendiment.
- 45 És una bona pràctica docent que un alumne no passi a la fase següent del projecte sense haver superat un control de qualitat. Per exemple, una vegada bobinat l'electroimant cal verificar si funciona. Quan s'ha fet tot el rotor, cal veure si l'eix roda bé dins la dolla, és a dir, cal controlar el fregament. Abans de començar el projecte es determinen els «controls de qualitat», així s'estalvien problemes i els errors d'execució no s'acumulen.
- 46 L'arqueologia experimental intenta comprendre les tècniques que van emprar els grups humans per realitzar les seves activitats; la recreació de l'ús i la manera d'obtenir tot tipus d'artefactes fabricats per l'home permet rebutjar idees o modificar teories, raó per la qual es reconstrueixen experimentalment aquests objectes, usos i tècniques per després compararlos amb els objectes originals.
- 47 <<https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml>> (Consulta 11 gener 2020)



